การประมาณค่า Added Mass ของเรือ

น.อ.พศ. สมศักดิ์ แจ่มแจ้ง
กองวิชาวิศวกรรมเครื่องกลเรือ

Added Mass เป็นตัวแปรที่มีความสำคัญในการคำนวณพลศาสตร์การเคลื่อนที่ของเรือ (Ship's Dynamics) และการสั่นสะเทือนเรือ (Ship's Vibration) ซึ่งทั้ง ๒ หัวข้อเป็นวิชาที่มีการเรียนการสอนในโรงเรียนนายเรือ จากประสบการณ์ของผู้เขียนพบว่านักเรียนนายเรือมักมองว่าวิชาดังกล่าวยาก ทั้งนี้อาจเป็นเพราะคิดว่าเป็นเรื่องใหม่ที่ไม่เคยเรียนมาก่อนทั้ง ๆ ที่ทั้ง ๒ วิชาล้วนเป็นการนำความรู้พื้นฐานทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ที่เรียนมาประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์ และยิ่งเป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกับธรรมชาติการเคลื่อนที่ของเรือ และลักษณะงานที่ทหารเรือต้องปฏิบัติงานอยู่เสมอแล้วน่าจะเป็นเรื่องที่สามารถเข้าใจได้ง่าย ผู้เขียนจึงนำหัวข้อการประมาณค่า Added Mass ของเรือในแง่มุมของการสั่นสะเทือนมาเขียนเพื่อแสดงให้เห็นว่าวิชาความรู้พื้นฐานที่ได้เรียนมาสามารถนำมาใช้ให้เกิดประโยชน์ได้จริง

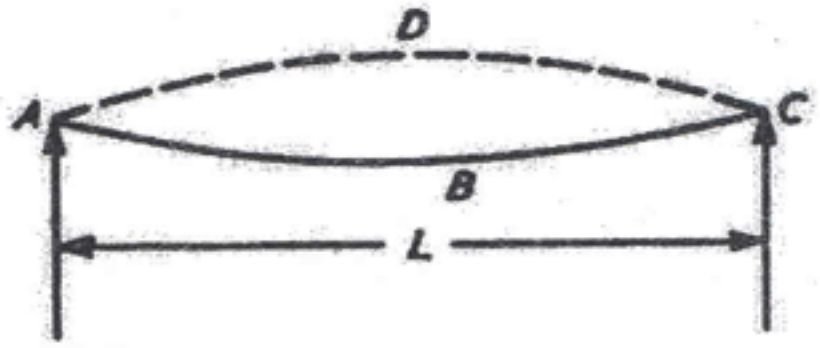
เมื่อพูดถึงการสั่นสะเทือนเรือสามารถแบ่งออกเป็นประเภทใหญ่ ๆ ได้ ๒ ประเภท ดังนี้

๑. Synchronous or Resonant Vibration ๒. Local Vibration

ในที่นี้จะกล่าวถึงการสั่นสะเทือนที่อาจก่อให้เกิดอันตรายกับเรือทั้งลำคือการสั่นกำธร (Resonance) ซึ่งถ้าออกแบบเรือไม่ดีอาจเกิดขึ้นกับเรือได้ทุกขณะโดยเฉพาะที่ความเร็วรอบเครื่องจักรต่ำ ๆ

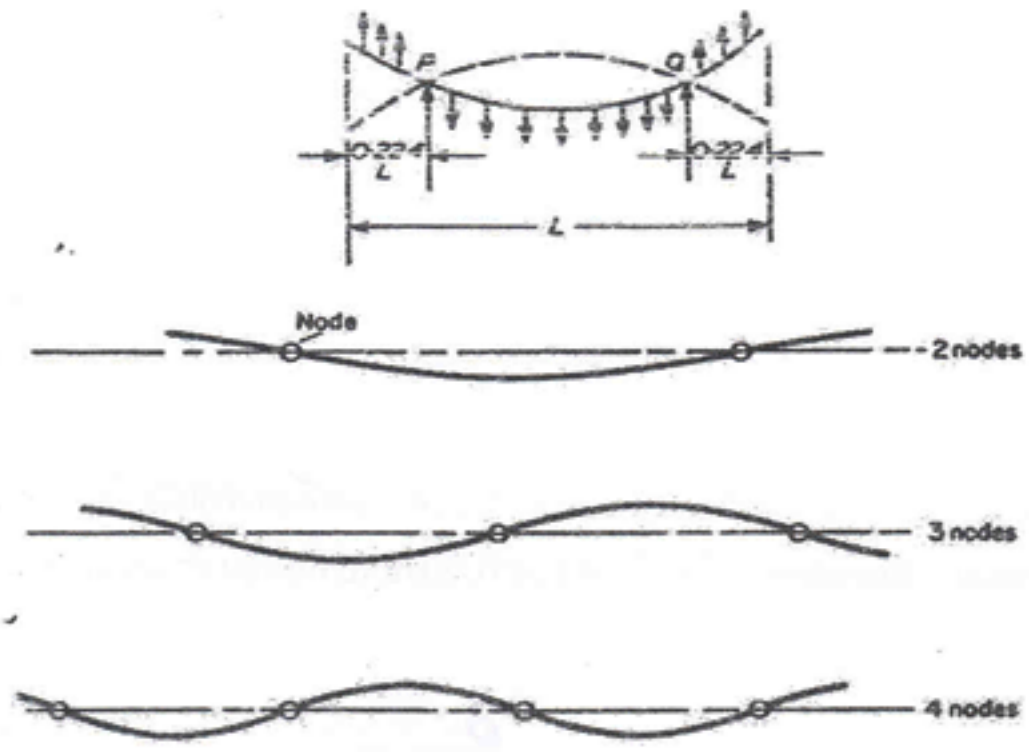
Resonant Vibration

เรือทั้งลำอาจแทนได้ด้วยคาน (Beam) เอกรูป (หน้าตัดคงที่) รูปสี่เหลี่ยมยืดหยุ่นได้หรือเรียกเฉพาะว่าเป็น "Elastic Girder of Box-like" ที่กำลังสั่นสะเทือนในน้ำโดยมีแรงลอยตัวซึ่งมีขนาดเท่ากับน้ำหนักเรือเป็นตัวรองรับ (Supporter) รูปที่ ๑ เป็นตัวอย่างการสั่นสะเทือนของเรือเสมือนคานที่มีจุดรองรับอยู่ที่ A และ C เห็นได้ว่า จุด CG ของคานเคลื่อนที่ขึ้นลงในทางดิ่งตลอดเวลา เรือจึงสั่นสะเทือนแบบ Vertical Vibration โดยมีจุดรองรับที่ปลายทั้งสองด้านของเรือเป็นจุดอยู่กับที่ (เป็น Nodes)



รูปที่ ๑

แต่อย่างไรก็ตามนาวาสถาปนิก (Naval Architect) สนใจการสั่นสะเทือนเรือ เรือที่ถูกรองรับหรือพยุง (Supported) ในลักษณะอื่นที่สอดคล้องกับการเคลื่อนที่ทางดิ่งของเรือมากกว่า คือมีลักษณะถูกรองรับเป็นแบบ "free-free Beam" กล่าวคือมีส่วนของหัวเรือและท้ายเรือเคลื่อนที่ขึ้นหรือลงในขณะที่ส่วนถัดเข้ามาเคลื่อนที่ตรงข้ามกันอยู่ (ดังในรูปที่ ๒) ทั้งนี้เนื่องจากการรองรับเรือในลักษณะดังกล่าวสอดคล้องกับรูปร่างแนวน้ำของเรือและสร้างความถี่ธรรมชาติการสั่นสะเทือนทางดิ่งค่อนข้างต่ำ (ประมาณ ๗ - ๑๕ Revolutions/min) ซึ่งใกล้กับย่านสั่นกำธรของเรือโดยทั่วไปจึงเสี่ยงต่อวิกฤติความแข็งแรงของโครงสร้างเรือ นอกจากนั้นรูปแบบการสั่นสะเทือนที่ถูกรองรับแบบ ๒ Nodes นี้เกิดขึ้นกับเรือบ่อยเพราะความยาวคลื่น ความยาวเรือ ความเร็วสัมพันธ์ระหว่างเรือกับคลื่น หรือแม้กระทั่งรูปแบบผิวหน้าอิสระที่เรือบังคับให้เกิดในขณะเคลื่อนที่ มักทำให้ผลลัพธ์ของรูปแบบคลื่นที่กระทำกับตัวเรือสั้นกว่าความยาวเรืออยู่เล็กน้อยจึงทำให้เสมือนว่าเรือถูกรองรับแบบ ๒ Nodes อยู่เสมอ บางครั้งจึงนิยมเรียกรูปแบบการสั่นสะเทือนของเรือเช่นนี้ว่าเป็น "Primary Mode" นั่นหมายถึงย่อมมีรูปแบบการสั่นแบบอื่น ๆ ที่มีจำนวนและตำแหน่งของ Nodes ต่าง ๆ กัน จากการศึกษาพบว่าถ้าจำนวนของ Nodes เพิ่มขึ้นความถี่ธรรมชาติในการสั่นสะเทือนทางดิ่งของเรือมักสูงขึ้น ลักษณะเช่นนี้มักเกิดขึ้นเมื่อเรือเคลื่อนที่ในพื้นน้ำชนิดคลื่นสั้น (Short-crest Sea)



รูปที่ ๒

นอกจากนั้นยังพบว่า ด้วยสัดส่วนของเรือประกอบกับปัจจัยทางพลศาสตร์ (Dynamics) อื่น ๆ ทำให้ลักษณะของ Primary Mode ที่สำคัญคือการถูกรองรับที่ระยะ $0.224\,L$ จากทั้ง ๒ ด้านของเรือซึ่งก็คือจุด P และ Q ในรูปที่ ๒ เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ไปมาระหว่าง ๒ Nodes ดังกล่าวคือคาบเวลา (Period) ของการสั่นสะเทือนทางดิ่งของเรือ ถ้าเป็นโครงสร้างที่มีหน้าตัดสม่ำเสมอจะคำนวณความถี่ธรรมชาติ

ของการสั่นสะเทือนทางดิ่งได้จากสมการดังนี้

$$N = \frac{n^2}{2\pi}\sqrt{\frac{EIg}{WL^3}} \qquad (๑)$$

โดย E = Modulus of Elasticity ของวัสดุที่ใช้ทำ Beam

I = Moment of Ineatia ของหน้าตัดเทียบกับแกนที่ผ่านแนว Neutral Axis ของหน้าตัด

W = น้ำหนักของ Beam

L = ความยาวของ Beam

n = ค่าคงที่ขึ้นอยู่กับ Mode ของการสั่น

สมการที่ (๑) ถูกดัดแปลงให้สอดคล้องกับข้อกำหนดต่าง ๆ โดยเฉพาะเกี่ยวกับรูปร่างหน้าตัดของคาน (Beams) แบบต่าง ๆ สำหรับเรือนั้นพบว่าการสั่นสะเทือนทางดิ่งแตกต่างกันตามความสูงของหน้าตัดและความยาวของเรือ นอกจากนั้นยังมีผลของแรงบิดที่กระทำกับตัวเรือ ความสั่นสะเทือนจากใบจักร ความสั่นสะเทือนที่ถ่ายทอดมาจากแหล่งกำเนิดอื่น ๆ และแรงจากคลื่นเข้ามาเกี่ยวข้องอีกด้วยจึงเป็นรูปแบบการสั่นสะเทือนที่ซับซ้อนพอสมควร แต่อย่างไรก็ตามในการออกแบบเรือเบื้องต้นผู้ออกแบบจำต้องทราบค่าความถี่ที่อาจสร้างความเสียหายให้กับเรือได้อย่างมาก ความถี่ดังกล่าวสามารถสร้างความเสียหายได้เนื่องจากเป็นความถี่ที่กระตุ้นให้โครงสร้างเรือสั่นตอบสนองตามอย่างรุนแรง

การศึกษาอย่างเป็นระบบครั้งแรกเกี่ยวกับ Ship – hull Vibration กระทำโดย Dr. Otto Schlick[๑] ในปี ๑๘๙๔ และได้เสนอ Empirical Formula สำหรับคำนวณความถี่ธรรมชาติของการสั่นสะเทือนทางดิ่งของเรือไว้ดังนี้

$$Frequency = \phi\sqrt{\frac{I}{\Delta L^3}} \qquad (๒)$$

โดย ϕ = ค่าคงที่ซึ่งหาได้ดีที่สุดจากเรือที่มีรูปร่างเหมือนกัน

ในปี ๑๙๓๒ นาวาสถาปนิกอีกท่านคือ Todd[๒] ได้แนะนำค่า ϕ สำหรับประกอบการพิจารณาการสั่นแบบ ๒ Nodes ดังในตารางที่ ๑ ดังนี้

	2 Nodes Vertical Vibration		
ชนิดเรือ	(๑)	(๒)	(๓)
Large Tanker Fully Loaded	130,000	282,000	28,000
Small Tanker Fully Loaded	100,000	217,000	21,500
Cargo Ships at about 60% ของ Load Displacement	112,000	243,000	24,100

ตารางที่ ๑

โดยที่ ค่า ϕ ในแต่ละคอลัมน์ใช้ประกอบกับหน่วยของตัวแปรอื่น ๆ ดังนี้

(๑) I = $in^2\ ft^2$; Δ = tons ; L = feet

(๒) I = m^4 ; Δ = MN ; L = m.

(๓) I = $m^2\ cm^2$; Δ = tonnes ; L = m.

สมการที่ (๒) นับว่ายังไม่สมบูรณ์เนื่องจากมิได้รวมผลของ Added Mass ที่เกิดขึ้นเนื่องจากเรือเคลื่อนที่ในของเหลวซึ่งพบว่าขนาดมวลทั้งหมดที่นำมาพิจารณาจะต้องมีค่ามากกว่ามวลเรือ มวลที่เพิ่มเข้ามานี้เรียกว่าเป็น "Added Mass" การประมาณปริมาณของ Added Mass อาจใช้การเพิ่มค่าเป็น % ของมวลเรือได้ จากการศึกษาพบว่า Added Mass มีค่าประมาณ ๘๐ – ๑๐๐% หรือบางครั้งมากกว่าหนึ่งเท่าของมวลเรือเลยทีเดียว นอกจากนั้นยังอาจคำนวณ Total Mass (มวล + Added Mass) ได้โดยคูณมวลเรือด้วย "Virtual Inertia Factor" ที่แนะนำไว้โดย Todd ดังนี้

$$Virtual\ Inertia\ Factor = \frac{B}{3H} + 1.2 \qquad (๓)$$

โดยในที่นี้ B = ความกว้างของเรือ

H = ระดับกินน้ำลึก

ดังนั้น เมื่อนำไปเพิ่มเติมเข้ากับสมการที่ (๒) จึงมีรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$N = \phi\sqrt{\frac{I}{\Delta_1 L^3}} \qquad (๔)$$

โดย Δ_1 = Δ + Added Mass = Virtual Weight

$$= \Delta\left(\frac{B}{3H} + 1.2\right)$$

ดังนั้นความถี่ธรรมชาติของการสั่นสะเทือนทางดิ่งของเรือที่รวมผลของ Added Mass คำนวณได้ดังนี้

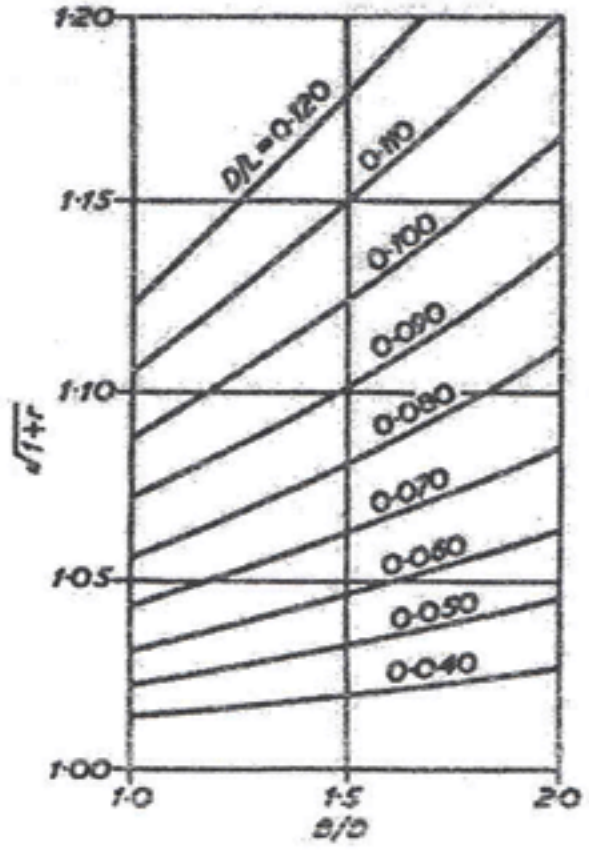
$$N = \phi\sqrt{\frac{I}{\left(\frac{B}{3H} + 1.2\right)\Delta L^3}} \qquad (๕)$$

นอกจากสมการที่ (๕) ซึ่งแนะนำโดย Todd แล้ว ยังมีสมการคำนวณ Virtual Weight (Total Mass) ที่แนะนำโดย Burrill[๓] ในปี ๑๙๓๕ โดยพัฒนาจาก Schlick Formula และการทดลองของ Lockwood Taylor[๔] ในปี ๑๙๒๘ ดังนี้

$$\Delta_1 = \Delta\left(1 + \frac{B}{2H}\right) \qquad (๖)$$

Burrill ยังได้เพิ่ม Sheer Correction Factor (Taylor ใช้ในการทดลอง) $\sqrt{1+r}$ และเสนอกราฟของ

แฟกเตอร์ $\sqrt{1+r}$ ตามอัตราส่วน B/D และ D/L ต่าง ๆ ไว้ดังในรูปที่ ๓



รูปที่ ๓

สมการสำหรับคำนวณความถี่ธรรมชาติการสั่นสะเทือนทางดิ่งของ Burrill (รวม Added Mass แล้ว) จึงมีรูปเป็นดังนี้

$$N = \frac{\phi}{\sqrt{\left(1+\frac{B}{2H}\right)(1+r)}}\sqrt{\frac{I}{\Delta L^3}} \qquad (๗)$$

โดยในหน่วย Imperial Unit มีหน่วยของตัวแปรต่าง ๆ เป็นดังนี้

B = ความกว้างเรือ หน่วยเป็น ft.
I = Moment of Inertia หน่วยเป็น in^2ft^2
H = กินน้ำลึกเรือ หน่วยเป็น ft.
D = ความสูงเรือ หน่วยเป็น ft.
Δ = ระวางขับน้ำ ในหน่วย tons
ϕ = 200,000
L = ความยาวเรือ หน่วยเป็น ft
$a = \frac{B}{D}$

โดยที่ r เป็นสัมประสิทธิ์ที่ขึ้นอยู่กับชนิดของแรงที่กระทำและอัตราส่วนระหว่างความสูงเรือและความยาวเรือ ซึ่ง Taylor[๕] (๑๙๓๐) ได้คำนวนค่า r ของโครงสร้างหน้าตัดแบบ Box Girder และนำมาประยุกต์ใช้กับโครงสร้างเรือได้ ดังนี้

$$r = \frac{3.5\,D^2(3a^3+9a^2+6a+1.2)}{L^2(3a+1)} \qquad (๘)$$

เมื่อตัวแปร L, B, D, H ในสมการที่ (๗) มีหน่วยเป็น m., Δ จะมีหน่วยเป็น tonnes และ I มีหน่วยเป็น m^2cm^2 ส่วน ϕ จะมีค่าเป็น ๔๔,๐๐๐

นอกจากนั้นยังมีสมการซึ่งแนะนำโดย Liddell และ Todd[๖] ในปี ๑๙๓๓ ดังนี้

$$N = 110{,}000\sqrt{\frac{I}{\Delta_1 L^3}} + 29 \qquad (๙)$$

โดย N = Revolution/min (2 Nodes Vertical Vibration)

I = Moment of Inertion ในหน่วย in^2ft^2

L = ความยาวเรือเป็น ft.

Δ_1 = $\Delta\left(1.2+\frac{B}{3H}\right)$ tons (๑๐)

B = ความกว้างเรือเป็น ft. ,

H = กินน้ำลึกเรือเป็น ft.

ในกรณีที่ L, B และ H มีหน่วยเป็น m. และ I มีหน่วยเป็น m^2 cm^2 , Δ_1 จะมีหน่วยเป็น tonnes, ค่าคงที่ซึ่งใช้คูณในสมการที่ (๙) จะมีค่าเป็น ๒๔,๐๐๐

บรรดาสมการคำนวณความถี่ธรรมชาติที่กล่าวมาล้วนมีพื้นฐานจาก Schlick Formula ซึ่งมีค่าโมเมนต์อินเนอเชียของหน้าตัด (I) เข้ามาเกี่ยวข้อง ปัญหาที่เกิดขึ้นคือในขั้นตอนเบื้องต้นของการออกแบบอาจยังไม่ทราบค่า I ที่แน่นอนเพราะยังไม่มีรายละเอียดขนาดหน้าตัดของโครงสร้าง ปัญหาดังกล่าวหลีกเลี่ยงโดยหันไปใช้สมการของ Todd ซึ่งอาศัยตัวแปรที่เป็นขนาดพื้นฐานของเรือ โดยมีรูปสมการเป็นดังนี้ (การพิจารณานี้ยังมิได้รวม Added Mass)

$$N = \beta\sqrt{\frac{BD^3}{\Delta L^3}} \qquad (๑๑)$$

โดยในหน่วย Imperial Unit

B = ความกว้างเรือ หน่วยเป็น ft.

D = ความสูงถึงดาดฟ้าชั้น Strength Deck หน่วยเป็น ft.

Δ = ระวางขับน้ำ หน่วยเป็น tons

L = ความยาว หน่วยเป็น ft.

β = ค่าคงที่ดังในคอลัมน์ที่ (๑) ของตารางที่ ๒ ดังนี้

ชนิดเรือ	2 Nodes Vertical Vibration		
	(๑)	(๒)	(๓)
Large Tanker Fully Loaded	61,000	11,000	112,00
Small Tanker Fully Loaded	45,000	8,150	82,500
Cargo Ships at about 60% ของ Load Displacement	51,000	9,200	93,250

ตารางที่ ๒

ถ้าหน่วยของตัวแปร I เป็น m^4 ,Δ เป็น MN , L , B , D เป็น m. ให้ใช้ค่า β ในคอลัมน์ที่ (๒) หาก I มีหน่วยเป็น $m^2 cm^2$, Δ เป็น tonnes, L , B , D เป็น m. ให้ใช้ค่า β ในคอลัมน์ที่ (๓) เมื่อนำผลของ Added Mass มาพิจารณาด้วยจะเขียนสมการที่ (๙) ได้ใหม่เป็น

$$N = \beta\sqrt{\frac{BD^3}{\Delta_1 L^3}} \qquad (๑๒)$$

โดย Δ_1 = Totai Mass (Virtuai Weigth) ดังในสมการที่ (๑๐) คือ

$$= \Delta\left(\frac{B}{3H}+1.2\right)$$

D = ความสูงถึงดาดฟ้าชั้น Strength Deck หน่วยเป็น ft.

B = ความกว้างเรือ หน่วยเป็น ft.

Δ = ระวางขับน้ำ หน่วยเป็น tons

ตัวอย่างการคำนวณ

เรือ Large Tanker ลำหนึ่งมีขนาดยาว ๑๒๘ m. กว้าง ๑๖.๗๕ m. กินน้ำลึก ๗.๓๔ m. มีค่าสัมประสิทธิ์แห่งตัน (Block Coefficient ; C_B) เท่ากับ ๐.๗๒ ถ้าโมเมนต์อินเนอเชียของหน้าตัดกลางลำเรือมีค่าเท่ากับ ๑๙๐,๕๐๐ $m^2 cm^2$ จงคำนวณหาความถี่ธรรมชาติการสั่นสะเทือนของเรือลำนี้เปรียบเทียบระหว่างกรณีไม่มี Added Mass และเมื่อนำ Added Mass มาพิจารณาด้วย

วิธีทำ คำนวณระวางขับน้ำของเรือเมื่อลอยในน้ำทะเล ($\rho g = 1.025$ tonne/m^3) ได้ดังนี้

$$\Delta = L \times B \times H \times C_B \times (\rho g)$$
$$= 128 \times 16.75 \times 7.34 \times 0.72 \times 1.025 = 11{,}600 \text{ tonnes}$$

จากสมการที่ (๒) และตารางที่ ๑ พบว่าค่า ϕ ที่สอดคล้องกับชนิดของเรือและหน่วยของตัวแปรตามโจทย์คือ ๒๘,๐๐๐ ดังนั้นความถี่ธรรมชาติการสั่นสะเทือนทางดิ่งของเรือลำนี้เมื่อไม่รวมผลของ Added Mass คือ

$$N = \phi\sqrt{\frac{I}{\Delta L^3}} = 28{,}000\sqrt{\frac{190{,}500}{11{,}600\times 128^3}} = 78.35 \quad \text{Revolutions/min}$$

เมื่อรวมผลของ Added Mass จะคำนวณความถี่ธรรมชาติการสั่นสะเทือนทางดิ่งได้จากสมการที่ (๔) คือ $N = \phi\sqrt{\frac{I}{\Delta_1 L^3}}$ โดยมวลรวมทั้งหมดคือ $\Delta_1 = \Delta\left(\frac{B}{3H}+1.2\right)$

ดังนั้น $\Delta_1 = 11{,}600\left(\frac{16.75}{3\times 7.34}+1.2\right) = 11{,}600\times 1.96 = 22{,}736$ tonnes

จากข้างต้นเห็นได้ว่า Added Mass ของเรือมีค่าถึง ๙๖% ของมวลเรือทีเดียว ความถี่ธรรมชาติของการสั่นสะเทือนทางดิ่งของเรือที่รวม Added Mass จึงคำนวณได้ดังนี้

$$N = \phi\sqrt{\frac{I}{\left(\frac{B}{3H}+1.2\right)\Delta L^3}} = 28{,}000\sqrt{\frac{190{,}500}{(1.96\times 11{,}600)\times 128^3}} = 55.97 \quad \text{Revolutions/min}$$

เห็นได้ว่าหากพิจารณาการสั่นสะเทือนเรือโดยไม่นำผลของ Added Mass มาคิดจะประมาณความถี่ธรรมชาติการสั่นได้สูงกว่าความเป็นจริง สิ่งนี้อาจสร้างความเสียหายแก่เรืออย่างมากหากตัวเรือได้รับการถ่ายทอดการสั่นสะเทือนจากเครื่องจักรหรือคลื่นในย่านความถี่ใกล้เคียงกับความถี่แท้จริงดังกล่าว

จากที่กล่าวมาทั้งหมดคงพอทำให้นักเรียนนายเรือและผู้ที่สนใจ มีความรู้เกี่ยวกับธรรมชาติการเคลื่อนที่ของเรือมากขึ้น และทราบว่าพลศาสตร์การเคลื่อนที่ของเรือ[๗] และการสั่นสะเทือนเรือมีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน ถึงแม้จะเป็นเรื่องที่ซับซ้อนมากแต่โดยพื้นฐานวิทยาศาสตร์เกี่ยวกับเรือที่มีการสอนในโรงเรียนนายเรือ โดยเฉพาะแล้วนักเรียนนายเรือมีศักยภาพพอที่จะเข้าใจได้โดยง่าย ผู้เขียนจะพยายามนำบทประยุกต์ทางวิศวกรรมที่เกี่ยวข้องกับเรือเช่นนี้มานำเสนอในโอกาสต่อไป

เอกสารอ้างอิง

๑ Schlick,O.*Further investigations of the vibrations of steamers*,I.N.A.,1894.

๒ Todd,F.H.*Some measurements of ship vibration* ,N.E.C.I.,1932.

๓ Burrill,L.C.*Ship-vibration-simple methods of estimating critical frequencies* ,N.E.C.I.,1935.

๔ Taylor,J.L.*Ship vibration periods*, N.E.C.I.,1928.

๕ Taylor,J.L.*Vibration of ships*, I.N.A.,1930.

๖ Todd,F.H.*Ship vibration-a comparison of measured with calculated frequencies* ,N.E.C.I.,1933.

๗ นาวาเอก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สมศักดิ์ แจ่มแจ้ง, *พลศาสตร์ทางเรือ, โรงเรียนนายเรือ*, ๒๕๔๑