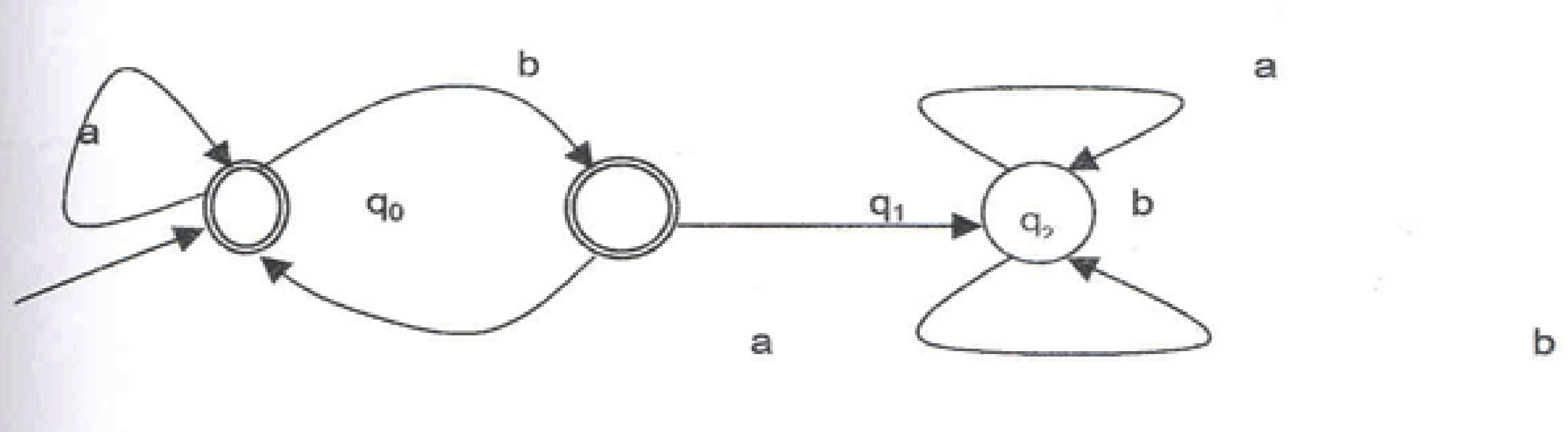
เครื่องออโตเมตาจำกัด
(The Finite Automata)

น.อ.พศ. ปรีดี จุลสำลี
กองวิชาคณิตศาสตร์

ตอนที่ ๑ ผู้เขียนได้นำเสนอ เครื่องมือที่เรียกว่า เครื่องสถานะจำกัด (Finite state machines) ให้ผู้อ่านหรือผู้ที่สนใจได้รับทราบไปแล้ว **ตอนที่ ๒** นี้ ขอนำเสนอเครื่องมือที่มีตัวแบบคล้ายกับเครื่องสถานะจำกัดอีกตัวแบบหนึ่งในเชิงคณิตศาสตร์ที่เป็นตัวดลใจหรือชักนำทำให้เกิดเครื่องคอมพิวเตอร์ขึ้นมา ตัวแบบนี้เป็นเครื่องมือที่แสดงภาวะการคำนวณได้และใช้ได้จริง ๆ ก่อนการผลิตเครื่องคอมพิวเตอร์ที่คนส่วนใหญ่ใช้กันอยู่ในปัจจุบัน ถ้าเราเข้าใจตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์นี้ จะช่วยทำให้เข้าใจว่าการคำนวณเข้าไปอยู่ในโปรแกรมที่ทำงานบนเครื่องคอมพิวเตอร์ได้อย่างไร ตัวแบบนี้เรียกว่า Finite Automata ซึ่งสองเครื่องนี้จะทำงานคล้าย ๆ กัน ต่างกันตรงที่ว่า Finite State Machine รับข้อมูลเป็นสายตัวอักขระ และจะอ่านทีละตัวอักขระพร้อมกับแสดงผลข้อมูลในแต่ละสถานะที่อยู่ออกเป็นตัวอักขระ เครื่องจะหยุดการทำงานเมื่ออ่านตัวอักขระสุดท้ายและได้ผลลัพธ์รวมสุดท้ายเป็นสายตัวอักขระ แต่ Finite Automata รับข้อมูลเป็นสายตัวอักขระเช่นกันและอ่านทีละตัวอักขระ แต่จะไม่แสดงผลข้อมูลออกในแต่ละสถานะ เครื่องจะหยุดการทำงานเมื่ออ่านตัวอักขระสุดท้ายและผลลัพธ์สุดท้ายจะเป็น การยอมรับ (Accept) หรือ ไม่ยอมรับ (Reject) เท่านั้น ดังนั้น State Diagram ของเครื่องนี้ต้องมีสถานะยอมรับรวมอยู่ด้วย ทั้งนี้เพื่อให้เห็นเด่นชัดเราจะระบุเป็นวงกลมสองวงล้อมรอบที่สถานะยอมรับ ถ้าสถานะใดมีวงกลมล้อมรอบหนึ่งวงถือว่าสถานะนั้นไม่ยอมรับ ตัวอย่าง State Diagram ของ Finite Automata เครื่องหนึ่ง (รูปที่๑)



รูปที่ ๑: State Diagram

จะเห็นว่า สถานะ q_0 และ q_1 เป็นสถานะยอมรับ แต่ q_2 ไม่ยอมรับ ในแต่ละสถานะ q_0 , q_1 และ q_2 มีเฉพาะข้อมูลเข้าเป็นตัวอักขระ a และ b ไม่มีข้อมูลออก เครื่องนี้จะสิ้นสุดที่การยอมรับหรือไม่ยอมรับเท่านั้น ถ้ายอมรับการส่งผ่านข้อมูลสุดท้ายจะไปหยุดที่สถานะ q_0 หรือ q_1 เท่านั้น ถ้าหยุดที่ q_2 จะไม่ยอมรับ

เมื่อพิจารณาการทำงานของเครื่องนี้ สมมติ ว่าเรามีข้อมูลเข้าเป็นสายตัวอักขระ (String) "*abaabab*" ดูซิว่าเครื่องนี้ยอมรับสายอักขระนี้หรือไม่ ?

พิจารณา เริ่มจากอักขระตัวแรกของ "*abaabab*" ได้แก่ a ใส่เข้าไปที่ สถานะเริ่มต้น q_0 ผลยังอยู่ที่ q_0 ต่อไปใส่ b ที่ q_0 ผลเลื่อนไปอยู่ที่ q_1 ใส่ a ที่ q_1 ผลไปอยู่ที่ q_0 ใส่ a ที่ q_0 ผลไปอยู่ที่ q_0 ใส่ b ที่ q_0 ผลเลื่อนไปอยู่ที่ q_1 ใส่ a ที่ q_1 ผลไปอยู่ที่ q_0 ใส่ b ตัวสุดท้ายที่ q_0 ผลเลื่อนไปอยู่ที่ q_1 ซึ่งเป็นสถานะสุดท้ายและเป็นสถานะยอมรับ

สรุป เครื่องนี้ยอมรับสายตัวอักขระ "*abaabab*"

หรือเขียนเป็นลำดับได้ดังนี้

$$q_0 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{a}$$

$$q_0 \xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{b} q_1$$

และถ้าสมมติว่า ข้อมูลเข้าเป็นสายตัวอักขระ "*babaabbab*" ทดลองกับเครื่องนี้
เขียนเป็นลำดับดังนี้

$$q_0 \xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{b}$$

$$q_1 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{b} q_2$$

เห็นว่าสถานะสุดท้ายอยู่ที่ q_2 ซึ่งเป็นสถานะที่ไม่ยอมรับ

สรุป เครื่องนี้ไม่ยอมรับสายตัวอักขระ "*babaabbab*"

จากข้อมูลเข้าที่ให้เป็นตัวอย่างกับเครื่องนี้คำตอบออกมาว่ายอมรับกับไม่ยอมรับสายอักขระดังกล่าวนี้ ดังนั้นพอจะสรุปการทำงานของเครื่องได้ว่า เครื่องนี้ทำงานตรวจข้อมูลที่เป็นสายตัวอักขระประเภทที่ไม่มี b ติดกันสองตัวขึ้นไป กล่าวคือ เครื่องจะยอมรับสายตัวอักขระที่ไม่มี b เขียนติดกัน

เมื่อมาพิจารณาข้อมูลทั้งหมดที่อยู่ใน state diagram ข้างบน สามารถกำหนดเป็นนิยามของ finite Automata ได้เป็นดังนี้

๑. ข้อมูลเข้า มีสมาชิกเป็นตัวอักขระ ให้เป็นเซตจำกัดเซตหนึ่ง เขียนแทนด้วย $\sum$

๒. ข้อมูลที่เป็นสถานะภายใน มีสมาชิกเป็น q_0, q_1, q_2 ให้เป็นเซตจำกัดเซตหนึ่ง เขียนแทนด้วย S

๓. ให้ F เป็นสับเซตของ S มีสมาชิกเป็นสถานะยอมรับ

๔. ให้ $q_0 \in S$ เป็นสถานะเริ่มต้น

๕. ฟังก์ชันเปลี่ยนสถานะเป็น δ จาก $S \times \sum \rightarrow S$ ในที่นี้เราสามารถนิยามตามตัวอย่าง State Diagram ข้างบนเป็น

$$\delta(q_0,a)=q_0 \quad , \quad \delta(q_1,a)=q_0 \quad , \quad f(q_2,a)=q_2$$
$$\delta(q_0,b)=q_1 \quad , \quad \delta(q_1,b)=q_2 \quad , \quad f(q_2,b)=q_2$$

ดังนั้น เครื่องนี้ประกอบด้วยสัญลักษณ์ต่าง ๆ เราสรุปเขียนแทนด้วย

$M = \left\langle S, \sum, \delta, q_0, F \right\rangle$ เป็น finite Automata เครื่องหนึ่ง

เราลองมาออกแบบสร้าง Finite Automata ที่ยอมรับเฉพาะตัวอักขระที่ประกอบด้วย 0 กับ 1 โดยที่สายตัวอักขระที่เครื่องนี้ยอมรับต้องเป็นสายตัวอักขระที่มี 0 ประกอบด้วยเป็นจำนวนคู่ตัว และ มี 1 เป็นจำนวนคี่ตัว เช่น สายตัวอักขระที่เครื่องนี้ยอมรับ "0011001" และ "10100101100" หรือไม่ยอมรับ "01011011" และ "1100"

วิธีทำ เราให้ $M = \left\langle S, \sum, \delta, q_0, F \right\rangle$ เป็น finite Automata หนึ่ง

มี $\sum = \{0,1\}$ และ

$S = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ ซึ่งให้

q_0 แทน สถานะที่อ่าน 0 ไปแล้วเป็นจำนวนคู่ตัว และอ่าน 1 ไปแล้ว เป็นจำนวนคู่ตัว

q_1 แทน สถานะที่อ่าน 0 ไปแล้วเป็นจำนวนคี่ตัว และอ่าน 1 ไปแล้ว เป็นจำนวนคู่ตัว

q_2 แทน สถานะที่อ่าน 0 ไปแล้วเป็นจำนวนคู่ตัว และอ่าน 1 ไปแล้ว เป็นจำนวนคี่ตัว

q_3 แทน สถานะที่อ่าน 0 ไปแล้วเป็นจำนวนคี่ตัว และอ่าน 1 ไปแล้ว เป็นจำนวนคี่ตัว

นำมาเขียนเป็น state diagram ได้ดังนี้

เริ่มที่ q_0 เดิมมี 0 จำนวนคู่ และ 1 เป็นคู่

ถ้าใส่ 0 เข้าไป กลายเป็น 0 จำนวนคี่ และ 1 เป็นคู่ สถานะเปลี่ยนไปที่ q_1

ถ้าใส่ 1 เข้าไป กลายเป็น 0 จำนวนคู่ และ 1 เป็นคี่ สถานะเปลี่ยนไปที่ q_2

ที่ q_1 เดิมมี 0 จำนวนคี่ และ 1 เป็นคู่

ถ้าใส่ 0 เข้าไป กลายเป็น 0 จำนวนคู่ และ 1 เป็นคู่ สถานะเปลี่ยนไปที่ q_0

ถ้าใส่ 1 เข้าไป กลายเป็น 0 จำนวนคี่ และ 1 เป็นคี่ สถานะเปลี่ยนไปที่ q_3

ที่ q_2 เดิมมี 0 จำนวนคู่ และ 1 เป็นคี่

ถ้าใส่ 0 เข้าไป กลายเป็น 0 จำนวนคี่ และ 1 เป็นคี่ สถานะเปลี่ยนไปที่ q_3

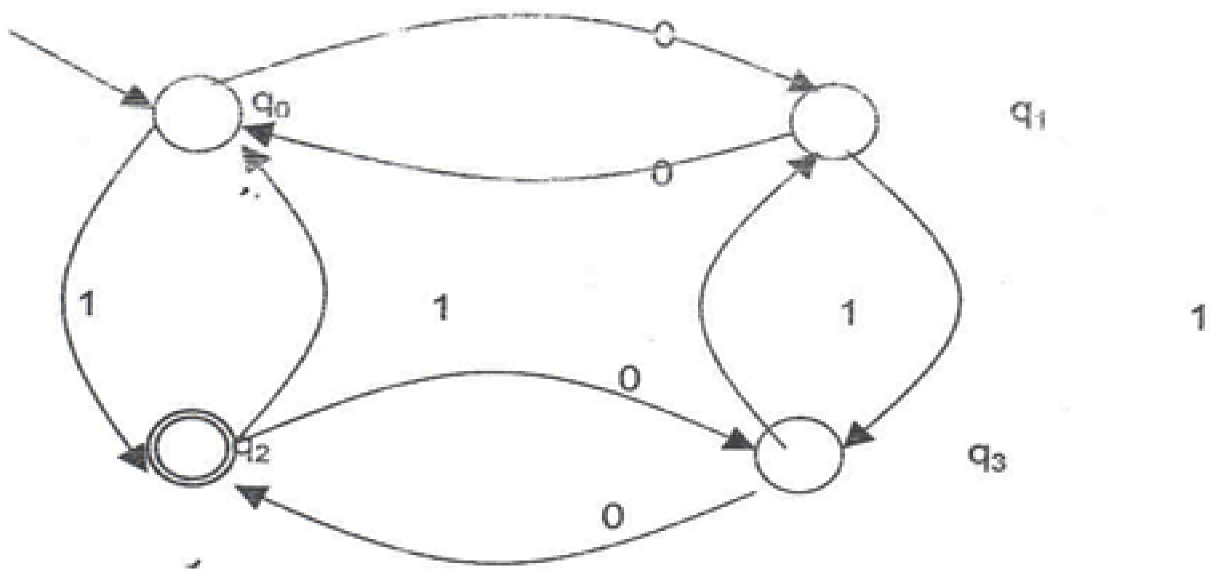
ถ้าใส่ 1 เข้าไป กลายเป็น 0 จำนวนคู่ และ 1 เป็นคู่ สถานะเปลี่ยนไปที่ q_0

ที่ q_3 เดิมมี 0 จำนวนคี่ และ 1 เป็นคี่

ถ้าใส่ 0 เข้าไป กลายเป็น 0 จำนวนคู่ และ 1 เป็นคี่ สถานะเปลี่ยนไปที่ q_2

ถ้าใส่ 1 เข้าไป กลายเป็น 0 จำนวนคี่ และ 1 เป็นคู่ สถานะเปลี่ยนไปที่ q_1

ดังรูปที่ ๒



รูปที่ ๒: **State Diagram**

และมี $F=\{q_2\}$ ฟังก์ชันการผ่าน $\delta : S \times \sum \rightarrow S$ ได้ดังนี้

$$\delta(q_0,0)=q_1 \;,\quad \delta(q_1,0)=q_0 \;,\quad \delta(q_2,0)=q_3 \;,\quad \delta(q_3,0)=q_2$$
$$\delta(q_0,1)=q_2 \;,\quad \delta(q_1,1)=q_3 \;,\quad \delta(q_2,1)=q_0 \;,\quad \delta(q_3,1)=q_1$$

เมื่อเราออกแบบและสร้างเครื่องเสร็จนำมาทดสอบกับสายตัวอักขระเข้า "0011001"
ตาม state diagram ข้างบน

$$q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{0} q_0 \xrightarrow{1} q_2 \xrightarrow{1} q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{0} q_0 \xrightarrow{1} q_2$$

จะเห็นว่า เครื่องนี้ยอมรับ เพราะสุดท้ายอยู่ที่ สถานะ q_2
ทดสอบกับสายตัวอักขระเข้า "01011011"

$$q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{1} q_3 \xrightarrow{0} q_2 \xrightarrow{1} q_0 \xrightarrow{1} q_2 \xrightarrow{0} q_0 \xrightarrow{1} q_2 \xrightarrow{1} q_0$$

เครื่องนี้ไม่ยอมรับ เพราะสุดท้ายอยู่ที่ สถานะ q_0 ซึ่งไม่ใช่สถานะยอมรับ

สรุป เครื่องนี้ยอมรับสายตัวอักขระเข้าที่มี 0 จำนวนคู่และมี 1 จำนวนคี่ เท่านั้น สายตัวอักขระอื่น ๆ จะไม่ยอมรับ และเมื่อทดสอบความถูกต้องแล้วเราก็สามารถใช้เครื่องนี้ มาคำนวณกับทุกสายตัวอักขระตามจุดประสงค์ของเครื่องได้ตลอด

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

เอกสารอ้างอิง

๑. WOOD,D. **Thoery of Computation** . John Wiley & Sons,1987

๒. HOPCROFT, J. E. And J. D ULLMAN . **Introduction to Automata Thoery Languages and Computation.** Addison – Wesley ,1990

๓. COHEN,D. I. A. **Introduction to Computer Theory.** John Wiley & Sons,1991

๔. อ. สุวิมล ฮอลล์ **ทฤษฎีการคณนา (Theory of Computation)** ภาควิชาคณิตศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย