

พลวัตแบบลอเรนซ์ (Lorenz Dynamics)

กับทฤษฎีโรระเบียบ (Chaos Theory)

ร.ท. สุระ บรรจงจิตร

ช่วยราชการ ยุทธการโรงเรียนนายเรือ

บทนำ

นักวิทยาศาสตร์และวิศวกรสามารถอธิบายปรากฏการณ์ต่าง ๆ รอบตัวเรา ทั้งที่เป็นไปโดยธรรมชาติและสิ่งที่มนุษย์สร้างขึ้นด้วยสมการทางคณิตศาสตร์ เพื่อช่วยในการศึกษาทำความเข้าใจปรากฏการณ์นั้น ๆ หรือเพื่อควบคุมปรากฏการณ์ต่าง ๆ ให้เป็นไปตามที่ต้องการ เพื่อนำมาใช้ให้เป็นประโยชน์ การอธิบายปรากฏการณ์ต่าง ๆ ในเชิงคณิตศาสตร์นั้นเรียกว่าการจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Modeling) โดยมักใช้สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations) ซึ่งสามารถใช้ได้กับปรากฏการณ์หลายประเภทไม่จำกัดสาขาวิชา เช่น ปรากฏการณ์ทางกลศาสตร์ ปฏิกิริยาเคมี และวงจรไฟฟ้า เป็นต้น

ทฤษฎีระบบ (System Theory)

เป็นอีกแขนงวิชาหนึ่งที่ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการศึกษาและควบคุมระบบ (หรือปรากฏการณ์) ต่าง ๆ โดยแบ่งระบบออกเป็นระบบเชิงเส้น (Linear Systems) และระบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear Systems) ซึ่งก่อนที่จะกล่าวถึงรายละเอียดและข้อแตกต่างของระบบทั้งสองแบบ ผู้เขียนจะกล่าวถึงพื้นฐานในการวิเคราะห์ระบบเบื้องต้นก่อน

คุณสมบัติ (Characteristics) หลักของระบบที่นักวิเคราะห์ระบบหรือวิศวกรระบบต้องการศึกษา คือ จุดสมดุล (Equilibrium Points) และ เสถียรภาพ (Stability) ของระบบนั้น ๆ จุดสมดุล คือจุด (หรือสถานะ - States) ที่ระบบหยุดนิ่งหรือไม่มีการเปลี่ยนแปลงใด ๆ ตัวอย่างเช่น จุดสมดุลในระบบของก้อนน้ำหนักรที่ห้อยติดอยู่กับสปริง ก็คือจุดที่ก้อนน้ำหนักรนั้นดึงให้สปริงยืดจนแรงดึงของสปริงสมดุลกับแรงโน้มถ่วงที่ดึงก้อนน้ำหนักรอยู่ ลักษณะหลักอีกอย่างหนึ่งของระบบก็คือเสถียรภาพของระบบ หรือถ้าจะให้เฉพาะเจาะจงลงไปก็คือเสถียรภาพของจุดสมดุลในระบบ จุดสมดุลของระบบจะเป็นจุดสมดุลที่เสถียร (Stable) ก็ต่อเมื่อจุดสมดุลนั้นดึงดูดสถานะที่อยู่ใกล้เคียงในระบบนั้น และจุดสมดุลจะไม่เสถียรถ้าสถานะที่อยู่ใกล้เคียงถูกผลักออก ดังนั้นจุดสมดุลในตัวอย่างของระบบก้อนน้ำหนักรที่ห้อยติดอยู่กับสปริงจึงเป็นจุดสมดุลที่เสถียร เนื่องจากก้อนน้ำหนักรจะถูกดึงกลับไปจุดสมดุลเมื่อถูกขยับออกจากจุดสมดุลนั้น

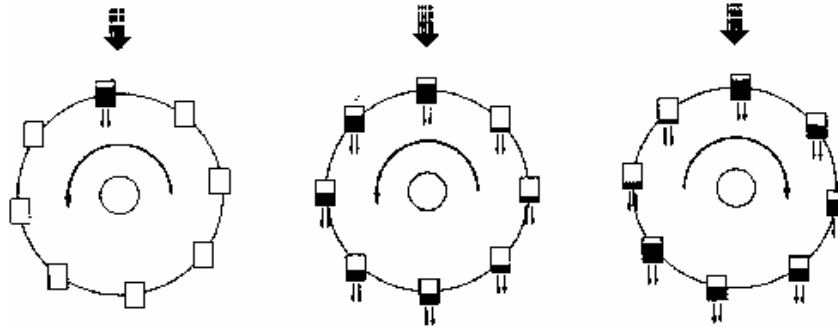
ข้อแตกต่างที่สำคัญระหว่างระบบเชิงเส้นกับระบบไม่เชิงเส้นคือ การรวมกันแบบ Superposition ไม่สามารถกระทำได้ในระบบไม่เชิงเส้น ระบบเชิงเส้นจะมีจุดสมดุลต่อเนื่องกันเพียงจุดเดียว (อาจมีหลายจุดได้ในกรณีที่ค่าเจาะจง - Eigenvalues เป็นศูนย์ แต่ทุกจุดจะต่อเนื่องกันเป็นเส้น) ส่วนระบบไม่เชิงเส้นสามารถมีจุดสมดุลที่ไม่ต่อเนื่องกัน (isolated equilibrium points) มากกว่าหนึ่งจุด นอกจากนั้นแล้ว ระบบไม่เชิงเส้นยังแสดงลักษณะพิเศษอื่น ๆ ที่ไม่พบในระบบเชิงเส้น เช่น การเข้าสู่อนันต์ในเวลาจำกัด (Finite Escape Time) วงรอบจำกัด (Limit Cycles) และความไร้ระเบียบ (Chaos) เป็นต้น

ตัวอย่างของพลวัต (Dynamics) ของระบบไม่เชิงเส้น (หรือเรียกว่า พลวัตไม่เชิงเส้น - Nonlinear Dynamics) ได้แก่ ลูกตุ้ม Pendulum จะเห็นได้ว่าระบบของลูกตุ้ม pendulum มีจุดสมดุลอยู่ ๒ จุดคือ จุดที่ลูกตุ้มอยู่ในแนวตั้งตั้งขึ้นและในแนวตั้งลง โดยจุดสมดุลในแนวตั้งตั้งขึ้นเป็นจุดสมดุลที่ไม่เสถียร (ลูกตุ้มที่ตั้งขึ้นในแนวตั้งสมบูรณ์จะคงอยู่ที่จุดนั้น แต่จะแกว่งออกจากตำแหน่งเดิมถ้าถูกรบกวน) และจุดสมดุลในแนวตั้งลงเป็นจุดสมดุลที่เสถียร

พลวัตแบบลอเรนซ์

พลวัตแบบลอเรนซ์ (Lorenz Dynamics) จัดเป็นพลวัตไม่เชิงเส้นอีกแบบหนึ่งที่มีลักษณะพิเศษเฉพาะที่น่าสนใจ พลวัตแบบลอเรนซ์ถูกค้นพบโดยนักอุตุนิยมวิทยาชื่อ Ed Lorenz ในปี ค.ศ.๑๙๖๓ ขณะกำลังศึกษาแบบจำลองสำหรับระบบ อุตุนิยมวิทยา (Meteorology) เพื่อพยากรณ์สภาวะอากาศจากการทราบเงื่อนไขเริ่มต้น เช่น ความเร็วลม อุณหภูมิ และความกดอากาศ แบบจำลองของลอเรนซ์ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวเนื่องกัน (coupled differential equations) ๑๒ สมการ โดยทำการคำนวณแบบทำซ้ำ (iteration) ด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ ลอเรนซ์พบว่าเมื่อเขาต้องการจะคำนวณสภาวะอากาศซ้ำเป็นครั้งที่สองโดยใช้ค่าเริ่มต้นจากผลที่ได้จากช่วงต้นของการคำนวณครั้งแรก ผลที่ได้รับกลับแตกต่างกันอย่างสิ้นเชิงหลังจากที่ทำการคำนวณไปได้ระยะหนึ่ง ลอเรนซ์สงสัยว่าผลที่แตกต่างกันระหว่างการคำนวณสองครั้งเกิดจากความผิดพลาดของเครื่องคอมพิวเตอร์ (ในยุคนั้นเครื่องคอมพิวเตอร์ยังใหม่ มีขนาดใหญ่เทอะทะ และเป็นสิ่งลึกลับสำหรับหลายคน) แต่หลังจากที่ตรวจสอบและทดลองใหม่อยู่หลายครั้ง ลอเรนซ์ก็ได้ข้อสรุปว่าผลที่ได้ออกมาต่างกันอย่างสิ้นเชิงนั้น เกิดจากความคลาดเคลื่อนในการใส่ค่าเริ่มต้นเพียงเล็กน้อยในระดับของจุดทศนิยมที่ไม่น่าจะเป็นเหตุของผลลัพธ์ที่ต่างกันมาก

ลักษณะเด่นของพลวัตแบบลอเรนซ์คือการแกว่งแบบไม่เป็นคาบ (non-periodic oscillation) และความไวต่อค่าเริ่มต้น (sensitive dependence on initial conditions) การที่ผลการคำนวณสภาวะอากาศสองครั้งของลอเรนซ์ออกมาแตกต่างกันมากจากค่าเริ่มต้นที่ต่างกันเพียงเล็กน้อย แสดงถึงความไวต่อค่าเริ่มต้นของระบบ นอกจากสภาวะอากาศแล้ว นักวิทยาศาสตร์ วิศวกร และนักคณิตศาสตร์รุ่นหลังยังใช้พลวัตแบบลอเรนซ์เพื่อศึกษาระบบอื่น ๆ เช่น เลเซอร์พลศาสตร์ (laser dynamics) และการเคลื่อนตัวของโมเลกุลในปฏิกิริยาเคมี



รูปที่ ๑ การทดลองกังหันน้ำ

การทดลองกังหันน้ำ

อีกตัวอย่างหนึ่งของพลวัตแบบลอเรนซ์ที่เป็นที่รู้จักกันดีสำหรับผู้ศึกษาพลวัตไม่เชิงเส้น ก็คือ กังหันน้ำที่ปล่อยน้ำลงตรงกลางและเจาะรูให้น้ำรั่วออกมาได้ การทดลองกังหันน้ำแบบนี้คิดค้นขึ้นโดยมัลคัส และโฮวาร์ด (Willem Malkus and Lou Howard) จากสถาบันเทคโนโลยีแห่งแมสซาชูเซตส์ (Massachusetts Institute of Technology) รูปที่ ๑ แสดงแบบของการทดลองกังหันน้ำ [๑] และผู้เขียนได้สร้างกังหันน้ำคล้ายแบบของมัลคัสและโฮวาร์ด [๒] เพื่อประกอบโครงการงานในวิชาพลศาสตร์ไม่เชิงเส้น ในรูปที่ ๒



รูปที่ ๒ กังหันน้ำที่ผู้เขียนสร้างขึ้น

สมการลอเรนซ์ในระบบกึ่งตันน้ำสามารถหาได้จากกฎการอนุรักษ์มวล (conservation of mass) และผลรวมแรงบิด (torque balance) [๑], [๒] จากกฎการอนุรักษ์มวลจะได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation):

$$\frac{\partial m}{\partial t} = Q - Km - \omega \frac{\partial m}{\partial \theta} \quad (๑)$$

โดยที่ตัวแปร Q , K , ω และ θ คืออัตราการไหลเข้า อัตราการไหลออก ความเร็วเชิงมุมของกึ่งตัน และมุมเอียงของกึ่งตันตามลำดับ ส่วน m คือการกระจายมวลของน้ำในกึ่งตันซึ่งเป็นฟังก์ชันของมุมเอียงของกึ่งตัน θ และเวลา t อีกสมการหนึ่งได้จากผลรวมแรงบิด:

$$I\dot{\omega} = -v\omega + gr \int_0^{2\pi} m(\theta, t) \sin(\theta) d\theta \quad (๒)$$

โดยที่ I , $-v\omega$ และ r คือ โมเมนต์เฉื่อยคงที่ (steady-state moments of inertia) ของกึ่งตัน แรงบิดฝืด (damping torque) และรัศมีของกึ่งตันตามลำดับ ส่วนพจน์อินทิเกรต คือแรงบิดที่เกิดจากแรงโน้มถ่วง (gravitational torque)

สมการ (๑) และ (๒) จากการอนุรักษ์มวลและผลรวมแรงบิดสามารถกระจายให้อยู่ในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series expansion) ได้ :

$$m(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(t) \sin(n\theta) + b_n(t) \cos(n\theta)] \quad (๓)$$

$$Q(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos(n\theta) \quad (๔)$$

อัตราการไหลเข้าไม่มีพจน์ของ sine ในอนุกรมเนื่องจากตำแหน่งน้ำที่ไหลเข้าสมมาตรอยู่ที่กึ่งกลางของกึ่งตัน เมื่อแทนค่า m และ Q จาก (๓) และ (๔) ลงในสมการ (๑) และ (๒) จะได้:

$$\dot{a}_n = n\omega b_n - Ka_n \quad (๕)$$

$$\dot{b}_n = -n\omega a_n - Kb_n + q_n \quad (๖)$$

$$\dot{\omega} = (-v\omega + \pi g r a_1) / I \quad (๗)$$

เนื่องจากสมการ (๗) มีเพียงพจน์ $n = 1$ ของอนุกรมฟูรีเยร์ จึงสามารถเขียนแยกพจน์ $n = 1$ ของสมการ (๕), (๖) และ (๗) ได้เป็น:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -\omega b_1 - K a_1 \\ \dot{b}_1 &= -\omega a_1 - K b_1 + q_1 \\ \dot{\omega} &= (-v\omega + \pi g r a_1) / I \end{aligned} \quad (๘)$$

สมการ (๘) ทั้งสามสมการสามารถจัดอยู่ในรูปสมการลอเรนซ์มาตรฐาน [๒] ได้:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - z \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \quad (๙)$$

โดยที่ x , y และ z คือสถานะ (states) ของระบบ ส่วน r , b และ σ คือตัวแปร (parameters) ของระบบ

ความไร้ระเบียบ (chaos) ในพลวัตแบบลอเรนซ์

จุดสมดุลของพลวัตแบบลอเรนซ์สามารถหาได้จากสมการลอเรนซ์ (๙) โดยแทนค่าอนุพันธ์ของ x , y และ z ด้วยศูนย์ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} x_{eq} \\ y_{eq} \\ z_{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -\sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{bmatrix} \quad (๑๐)$$

เมื่อ $r < 1$ จุดสมดุลของระบบมีเพียงจุดเดียวที่ $(0,0,0)$ และเป็นจุดสมดุลที่เสถียร ซึ่งหมายความว่าสถานะของระบบจะกลับเข้าสู่จุดกำเนิด (origin) โดยธรรมชาติ อย่างไรก็ตาม จุดสมดุลจะเพิ่มเป็นสามจุดเมื่อ $r > 1$ และทั้งสามจุดจะไม่เสถียรเมื่อ $r > r_H$ โดยที่

$$r_H = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \quad (๑๑)$$

ถึงแม้ว่าจุดสมดุลทั้งสามจุดจะไม่เสถียรในกรณี $r > r_H$ พลวัตลอเรนซ์โดยรวมก็ไม่เข้าสู่อนันต์ แต่สถานะของระบบกลับมีการเปลี่ยนแปลงภายในขอบเขตจำกัด (bounded trajectory) ในลักษณะของการแกว่งแบบไม่เป็นคาบ (non-periodic oscillation) นอกจากนี้ พลวัตของระบบยังแสดงความไวต่อค่าเริ่มต้น ตามที่ลอเรนซ์พบในแบบจำลองสภาวะอากาศที่เขาสร้างขึ้นในปี ค.ศ. ๑๙๖๓ ลักษณะโดยรวมของระบบถึงแม้จะสามารถอธิบายได้ด้วยสมการคณิตศาสตร์ แต่ผลลัพธ์กลับไม่สามารถทำนายล่วงหน้าได้ เนื่องจากความคลาดเคลื่อนเพียงเล็กน้อยในการวัดค่าเริ่มต้น จะส่งผลให้สถานะของระบบแตกต่างกันอย่างสิ้นเชิงในที่สุด

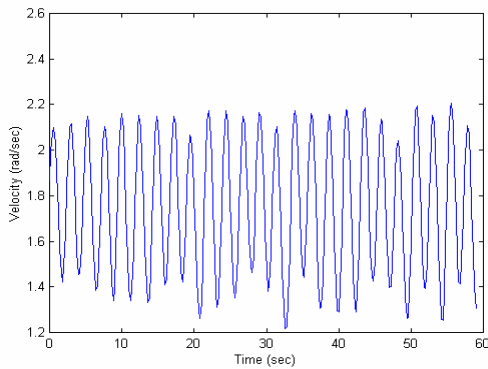
อันที่จริงมีผู้ค้นพบลักษณะของความไวต่อค่าเริ่มต้นก่อนหน้าการค้นพบของลอเรนซ์ โดยในคริสต์ศตวรรษที่ ๑๙ นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส เฮนรี พอยน์คาเร (Henri Poincaré) พบว่าผลการคำนวณการโคจรของวัตถุท้องฟ้าสามดวง (three celestial bodies) โดยใช้สมการของนิวตันนั้นไม่สามารถแสดงออกมาในรูปสมการต่อเนื่อง (closed-form solution) ได้ นอกจากนั้นแล้ว เส้นทางการโคจรที่คำนวณได้ ออกมาแตกต่างกันอย่างสิ้นเชิงเมื่อค่าเริ่มต้นของการโคจรเปลี่ยนไปเพียงเล็กน้อย อย่างไรก็ตาม นักคณิตศาสตร์และนักวิทยาศาสตร์ในสมัยนั้นไม่ให้ความสนใจกับการค้นพบของพอยน์คาเร เนื่องจากการคำนวณที่ซับซ้อนเกินกว่าที่จะทำได้โดยไม่ใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ (ซึ่งยังต้องรอไปอีกเกือบ ๑๐๐ ปี)

นอกจากการคำนวณที่ซับซ้อนแล้ว นักคณิตศาสตร์และนักวิทยาศาสตร์ในสมัยนั้นยังมีเหตุผลอื่นที่ไม่ให้ความสนใจกับการค้นพบของพอยน์คาเร นับตั้งแต่ก่อนการค้นพบสมการของนิวตันนักวิทยาศาสตร์และนักคณิตศาสตร์เชื่อว่าทุกสิ่งทุกอย่างในจักรวาลสามารถอธิบายได้ด้วยสมการทางคณิตศาสตร์ และถ้าทั้งจักรวาลถูกกำหนดไว้ด้วยกฎของวิทยาศาสตร์และสมการคณิตศาสตร์แล้ว มนุษย์ย่อมสามารถทำนายปรากฏการณ์ต่าง ๆ ล่วงหน้าได้ โดยการทราบค่าเริ่มต้นของปรากฏการณ์นั้น ๆ และความคลาดเคลื่อนในค่าเริ่มต้นเพียงเล็กน้อยจะส่งผลถึงผลการทำนายล่วงหน้าที่คลาดเคลื่อนเพียงเล็กน้อยเท่านั้นด้วย (ซึ่งเป็นจริงในกรณีของปรากฏการณ์เชิงเส้น) การค้นพบของพอยน์คาเรแสดงให้เห็นว่าความคลาดเคลื่อนแม้เพียงเล็กน้อย จะทำให้การทำนายล่วงหน้าผิดพลาดไปอย่างสิ้นเชิง ซึ่งหมายความว่า เป็นไปไม่ได้ที่จะทำนายปรากฏการณ์ที่มีความไวต่อค่าเริ่มต้นล่วงหน้าได้

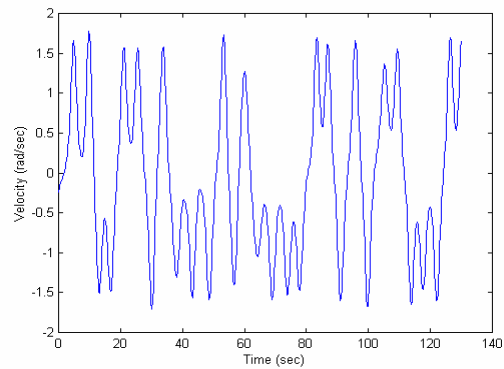
ปรากฏการณ์ความไวต่อค่าเริ่มต้น (sensitive dependence on initial conditions) ถูกเฉลยมาจนถึงกลางคริสต์ศตวรรษที่ ๒๐ เมื่อเริ่มมีการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ หลังจากการค้นพบของลอเรนซ์ ได้มีนักคณิตศาสตร์และนักวิทยาศาสตร์จำนวนมากที่เริ่มหันมาสนใจศึกษาปรากฏการณ์นี้อย่างจริงจัง และในกลางทศวรรษที่ ๗๐ นักฟิสิกส์ เจมส์ ยอร์ค (James Yorke) ชาวอเมริกันได้ตั้งชื่อปรากฏการณ์นี้ว่า “เคออส” (Chaos) ซึ่งเป็นชื่อที่ใช้แพร่หลายมาจนปัจจุบัน

ผลการทดลองกึ่งหันน้ำ

เซนเซอร์วัดความเร็ว (optical encoder) ใช้ร่วมกับเครื่องคอมพิวเตอร์เพื่อวัด และบันทึกความเร็วในการหมุนของตัวกึ่งหันน้ำ โดยที่อัตราการไหลเข้าในกึ่งหันสามารถปรับได้ด้วยลิ้นเปิด - ปิด เพื่อปรับแต่งคุณลักษณะภายในของระบบ เมื่อน้ำถูกปล่อยให้ไหลเข้าในอัตราที่สูงความเร็วการหมุนของกึ่งหันจะเปลี่ยนแปลงในลักษณะของการแกว่งแบบคงที่ (steady-state oscillation) ในรูปที่ ๓ และความเร็วการหมุนของกึ่งหันน้ำจะเปลี่ยนเป็นลักษณะของการแกว่งแบบไม่เป็นคาบและความไร้ระเบียบ เมื่ออัตราการไหลเข้าของน้ำลดลง ในรูปที่ ๔



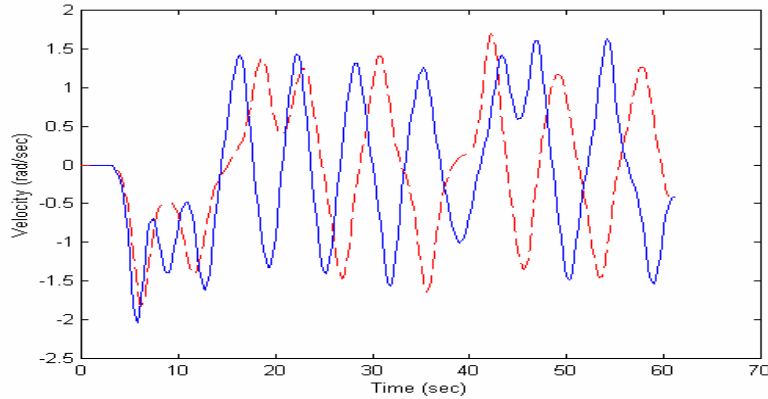
รูปที่ ๓ การแกว่งแบบคงที่



รูปที่ ๔ การแกว่งแบบไม่เป็นคาบ

รูปที่ ๓ และรูปที่ ๔ แสดงการเปลี่ยนแปลงของระบบจากการแกว่งแบบคงที่ ($1 < r < r_H$) ไปสู่เคออส ($r > r_H$) การแกว่งในรูปที่ ๓ มีขนาด (amplitude) ไม่คงที่ เนื่องจากแรงเสียดทานของแกนหมุนและความคลาดเคลื่อนในการสร้างตัวกึ่งหัน

ลักษณะความไวต่อค่าเริ่มต้นสามารถสังเกตได้ จากกราฟบันทึกความเร็วการหมุนของกึ่งหันในรูปที่ ๕ เมื่อตำแหน่งเริ่มต้นการหมุนของกึ่งหันน้ำเปลี่ยนไปเล็กน้อย กราฟความเร็วการหมุนของกึ่งหันทั้งสองครั้งไม่มีความคล้ายคลึงกันเลย



รูปที่ ๕ ความเร็วการหมุนของกังหันน้ำเมื่อค่าเริ่มต้นเปลี่ยนไป

สรุป

นอกจากพลวัตแบบลอเรนซ์แล้ว ปรากฏการณ์ไร้ระเบียบยังพบในพลวัตไม่เชิงเส้นอื่น ๆ อีก เช่น แฟรคทัล (fractal geometry) และการไหลแบบเทอร์บูเลนต์ (turbulent flow) พลวัตเหล่านี้ถูกกำหนดด้วยกฎเกณฑ์ทางวิทยาศาสตร์ และสามารถอธิบายได้ด้วยสมการคณิตศาสตร์ ปรากฏการณ์ไร้ระเบียบจึงไม่ใช่ความยุ่งเหยิงหรือไม่แน่นอนเหมือนอย่างที่หลายคนเข้าใจ (โดยเฉพาะเมื่อแปลจากชื่อ “chaos”) แต่เป็นการเปลี่ยนแปลงที่ซับซ้อนภายใต้กฎเกณฑ์แน่นอนแต่ไม่อาจทำนายล่วงหน้าได้อันเนื่องมาจากความไวต่อค่าเริ่มต้นของระบบ

เอกสารอ้างอิง

- [1] S. H. Strogatz. “Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering.” Addison Wesley, 1994.
- [2] J. V. Medanic. “Constructive Design Methods in Linear and Nonlinear Control.” Lecture Notes, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2000.
- [3] H. K. Kalil. “Nonlinear Systems.” Prentice Hall, 1996.
- [4] S. Bunchongchuitr. “Strange Attractors: The Waterwheel Experiment.” Project, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2001.