แนวคิดพื้นฐานและหลักการทำงานของ

Kalman Filter Algorithm

น.ต.ดร. กฤษฎา แสงเพ็ชร์ส่อง

อาจารย์ฝ่ายศึกษา โรงเรียนนายเรือ

บทคัดย่อ

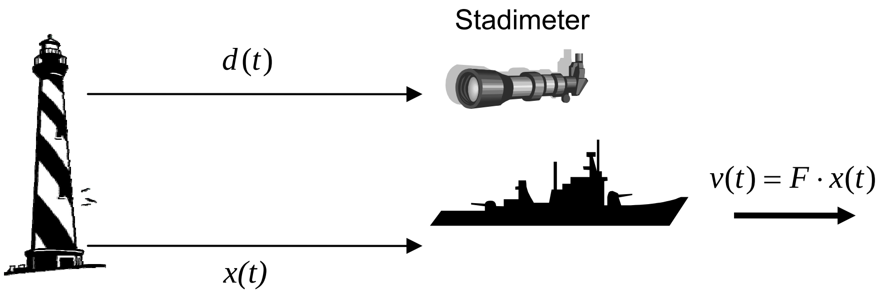
นับตั้งแต่ถูกพัฒนาขึ้นใน คริสต์ศักราช ๑๙๖๐ Kalman Filter เป็นวิธีการที่ดีที่สุดวิธีหนึ่งเพื่อประมาณสถานะของระบบ เป็นที่ยอมรับใช้งานอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน อย่างไรก็ตาม การศึกษาทำความเข้าใจ Kalman Filter Algorithm โดยเฉพาะสำหรับผู้เริ่มต้นยังเป็นเรื่องยาก เพราะจำเป็นต้องนำความรู้จากหลายสาขามาประยุกต์ใช้รวมกัน บทความนี้นำเสนอแนวคิดพื้นฐานและหลักการทำงานของ Kalman Filter Algorithm โดยเน้นความง่ายต่อการเข้าใจ ใช้ระบบหาระยะทางของเรือด้วย Stadimeter เป็นตัวอย่างในการวิเคราะห์ การพิจารณาเริ่มต้นด้วยการพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบ การบรรยายหลักการทำงานของ Kalman Filter ข้อสมมุติฐานและเหตุผลสนับสนุน การจำลองการทำงานของ Kalman Filter พร้อมด้วย Matlab Source Code ตลอดจนการวิเคราะห์จุดแข็งของ Kalman Filter ในแง่ที่เป็น Recursive Algorithm และตามความเหมาะสมกับการใช้วิเคราะห์ระบบที่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา (Dynamics) เปรียบเทียบกับการประมาณด้วยวิธี Moving Average

๑ บทนำ

โดยปกติ สิ่งที่เราต้องการรู้เมื่อวิเคราะห์ระบบก็คือ ณ เวลาหนึ่งๆ ระบบมีสถานะ (States) เป็นอย่างไร และสถานะของระบบเปลี่ยนแปลงตามเวลาอย่างไร ในทางปฏิบัติบ่อยครั้ง การหาสถานะของระบบไม่ใช่เรื่องง่าย เพราะมีข้อจำกัดหลายปัจจัย เช่น ความไม่สมบูรณ์ของเซนเซอร์ที่ใช้วัดสถานะของระบบและความคลาดเคลื่อนในการวัด เป็นต้น วิธีหนึ่งสำหรับหาสถานะของระบบคือใช้ Kalman Filter ซึ่งเป็นสูตรทางคณิตศาสตร์ (Algorithm) พัฒนาโดย ดร. R. E. Kalman ในปี คริสต์ศักราช ๑๙๖๐ [๑] Kalman Filter ถูกนำมาใช้เป็นครั้งแรกเพื่อประมาณสถานะของระบบนำร่องของยาน Apollo ในการโคจรรอบโลก [๒] ปัจจุบัน Kalman Filter ถูกนำมาใช้อย่างแพร่หลาย โดยเฉพาะอย่างยิ่งในศาสตร์ของ Data Fusion เพื่อใช้ประมวลข้อมูลจากเซนเซอร์หลายประเภท ภายใต้สัญญาณรบกวน (Noise) จากหลายแหล่ง มาใช้ร่วมกันในลักษณะเกื้อกูลกันเพื่อหาค่าประมาณของสถานะของระบบที่ดีที่สุด (Optimal) ตัวอย่างของระบบที่ใช้ Kalman Filter ได้แก่ Integrated INS/GPS System เป็นต้น [๓]

บทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อบรรยายในเบื้องต้นว่า Kalman Filter คืออะไรและใช้งานอย่างไร แม้ว่าคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการพัฒนา Kalman Filter Algorithm จะอยู่ในระดับที่ผู้ศึกษาระดับปริญญาตรีสามารถทำความเข้าใจได้ การทำความเข้าใจ Kalman Filter สำหรับผู้เริ่มต้นยังเป็นเรื่องยาก เพราะการพัฒนา Kalman Filter Algorithm เกี่ยวข้องกับการนำความรู้พื้นฐานจากหลายสาขา เช่น Algebra, Calculus, Statistics และ Dynamics มาประยุกต์ใช้ร่วมกัน ดังนั้นบทความนี้จึงพยายามที่จะบรรยาย Kalman Filter โดยใช้ตัวอย่างที่ง่ายต่อความเข้าใจ โดยหวังว่าจะช่วยให้ผู้อ่านสามารถทำความเข้าใจแนวคิดพื้นฐานของ Kalman Filter Algorithm ได้ง่ายขึ้น

๒ ตัวอย่างระบบวัดระยะทาง



ภาพที่ ๑ ตัวอย่างระบบหาระยะระหว่างเรือและประภาคาร

กำหนดให้ระบบตามแสดงใน ***ภาพที่ ๑*** ประกอบด้วยเรือที่กำลังแล่นไปทางขวาของประภาคารด้วยความเร็ว $v(t)$ ซึ่งมีค่าแปรผันตรงกับระยะทาง $x(t)$ ตามสมการอนุพันธ์ (First Order Linear Differential Equation)

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = F \cdot x(t) \qquad (๑)$$

สมมุติว่าสถานะของระบบที่ต้องการรู้คือระยะห่าง $x(t)$ ระหว่างเรือกับประภาคาร ดังนั้น จากการแก้สมการที่ (๑) สามารถคำนวณหาระยะ $x(t)$ ณ เวลา t ใดๆ ได้คือ

$$x(t) = x(t_0)e^{F\cdot(t-t_0)} \qquad (๒)$$

$x(t_0)$ คือระยะห่างที่เวลา $t = t_0$ สมการที่ (๑) และ (๒) คือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบเรียกว่า *Plant* หรือ *Process Model* เนื่องจากเป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนแปลงสถานะของระบบกับเวลา สมมุติว่านอกจากรู้ความเร็วของเรือแล้ว บนเรือยังมี Stadimeter ซึ่งเป็นกล้องแบบพิเศษสามารถใช้วัดระยะห่างได้ ดังนั้นนอกจากสมการที่ (๑) แล้ว ยังสามารถหาระยะ $x(t)$ ได้จาก

$$d(t) = x(t) \qquad (๓)$$

$d(t)$ คือค่าที่ Stadimeter วัดได้ สมการที่ (๓) คือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบเรียกว่า *Measurement Model* เนื่องจากเป็นสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสถานะของระบบกับค่าที่ "*เซนเซอร์*" วัดได้ สมการที่ (๑) และ (๓) ร่วมกันคือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบที่สมบูรณ์ (*System Model*) นอกจากนี้ สมการที่ (๑) และ (๓) เป็น System Model แบบ Deterministic กล่าวคือ ตั้งอยู่บนสมมุติฐานที่ว่า ความรู้ทุกอย่างเกี่ยวกับระบบถูกต้องแน่นอน ๑๐๐ เปอร์เซ็นต์ การใช้สมมุติฐานดังกล่าวมีข้อจำกัดในชีวิตจริง เพราะ

๑. *ไม่มีแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ใดที่สมบูรณ์ ๑๐๐ เปอร์เซ็นต์* สมมุติฐานที่ว่าเรือแล่นด้วยความเร็ว $v(t) = F \cdot x(t)$ ตามสมการที่ (๑) เป็นเพียงการประมาณ ในชีวิตจริงมีตัวแปรเป็นจำนวนมากที่มีผลต่อความเร็วและการเคลื่อนที่ของเรือ ซึ่งไม่สามารถนำมาเขียนเป็นสมการได้อย่างสมบูรณ์ (อายุการใช้งานเครื่องยนต์, อุณหภูมิ, การสึกหรอ, ประสิทธิภาพของเชื้อเพลิง ฯลฯ)

๒. *ไม่มีเซนเซอร์ใดที่วัดค่าได้สมบูรณ์ ๑๐๐ เปอร์เซ็นต์* ในทางปฏิบัติเซนเซอร์ทุกชนิดมีความคลาดเคลื่อน (Measurement Noise) จะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับหลายปัจจัย นอกจากนี้ ในชีวิตจริงมีสถานะของระบบหลายประเภทที่เซนเซอร์ไม่สามารถวัดได้โดยตรง เช่น ถ้าต้องการรู้ตำบลที่บนโลก หลายคนอาจแนะนำให้ใช้ GPS แต่สิ่งที่เครื่องรับ GPS วัดได้จริง ๆ ไม่ใช่ตำแหน่งแต่เป็นคลื่นสัญญาณวิทยุที่ถูกส่งมาจากดาวเทียม การที่เครื่องรับ GPS สามารถบอกตำแหน่งได้ ก็ด้วยการคำนวณเวลาที่คลื่นใช้เดินทางจากดาวเทียมมาถึงเครื่องรับ และแปลงเวลานี้เป็นระยะห่างระหว่างดาวเทียมกับเครื่องรับเพื่อใช้คำนวณหาตำแหน่งอีกต่อหนึ่ง ความพยายามที่จะแสดงความสัมพันธ์เหล่านี้ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ย่อมมีความคลาดเคลื่อนมาเกี่ยวข้อง

๓. *ปัจจัยภายนอกที่ไม่สามารถควบคุมได้* จากตัวอย่างข้างต้นปัจจัยภายนอกที่มีผลต่อความเร็วของเรือ เช่น กระแสน้ำ, กระแสลม และคลื่น เป็นต้น

ด้วยข้อจำกัดของการวิเคราะห์แบบ Deterministic ข้างต้น จึงนำไปสู่การวิเคราะห์แบบ Stochastic ซึ่งนำความไม่แน่นอน ข้อมูลทางสถิติ และหลักการของความน่าจะเป็นมาพิจารณาร่วมด้วย ในตัวอย่างนี้สามารถปรับปรุงและเขียนสมการที่ (๑) และ (๓) ได้ใหม่ในรูปของ Continuous-Time Stochastic System Model เป็น

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + w(t) \qquad (๔)$$

$$d(t) = x(t) + v(t) \qquad (๕)$$

$w(t)$ และ $v(t)$ เป็นตัวแปรสุ่ม (Random Variable) ใช้เป็นแบบจำลองความไม่แน่นอนในระบบ จากสมการที่ (๔) และ (๕) สามารถเขียน Discrete-Time System Model เพื่อหาระยะ $x(t)$ ณ เวลา $t = t_k$ ได้คือ

$$x_k = \Phi_{k-1} x_{k-1} + w_k \quad (๖)$$

$$d_k = x_k + v_k \quad (๗)$$

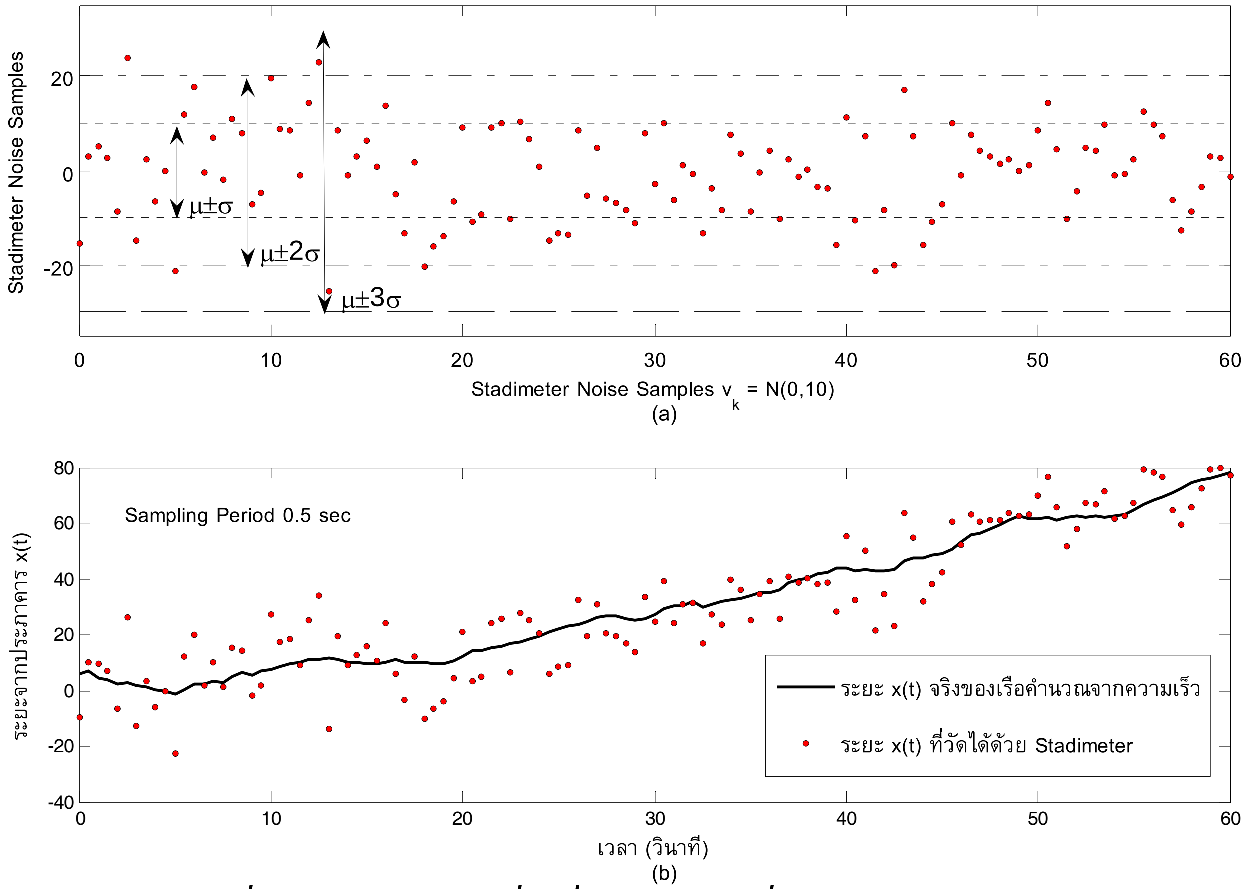
$\Phi_{k-1} = e^{F\Delta t}$, $\Delta t = t_k - t_{k-1}$, x_k และ x_{k-1} คือระยะห่างระหว่างเรือกับประภาคารที่เวลา $t = t_k$ และ $t = t_{k-1}$ ตามลำดับ ดังนั้นจะเห็นได้ว่าสมการที่ (๖) ช่วยให้สามารถหาสถานะของระบบที่เวลา $t = t_k$ ได้จากข้อมูลก่อนหน้า (สถานะของระบบที่เวลา $t = t_{k-1}$) แต่มีคำถามว่าจะใช้ค่า w_k และ v_k คืออะไรเนื่องจากเป็นตัวแปรสุ่ม

ตามที่ได้กล่าวแล้ว การเคลื่อนที่ของเรือมีความไม่แน่นอนในระดับหนึ่งเนื่องจากหลายปัจจัย เช่น กระแสน้ำ กระแสลม เป็นต้น สมมุติว่าเราสามารถจำลองความไม่แน่นอนของการเคลื่อนที่ได้โดยกำหนดให้ $w_k = N(0,1)$ * และสมมุติให้ความคลาดเคลื่อน (Measurement Noise) ของ Stadimeter คือ $v_k = N(0,100)$ ***ภาพที่2b*** แสดงตัวอย่างผลการจำลองการเคลื่อนที่ของเรือและค่าที่ Stadimeter วัดได้เมื่อสุ่มตัวอย่างทุก ๆ ๐.๕ วินาที ($\Delta t = 0.5\sec$) เป็นเวลา ๖๐ วินาที และ $F = 0.03$

จาก ***ภาพที่ ๒*** ทำให้เกิดคำถามว่า ในเมื่อเรารู้ความสัมพันธ์ของสถานะของระบบกับตัวแปรอื่นๆ รู้คุณลักษณะทางสถิติของระบบและของเซนเซอร์ เราจะสามารถนำข้อมูลทั้งหมดมาใช้ประกอบกับหลักการของความน่าจะเป็น ในลักษณะเกื้อกูลกันเพื่อหาค่าประมาณที่ดีที่สุดของสถานะของระบบได้หรือไม่อย่างไร และคำตอบก็คือสามารถทำได้โดยการใช้ Kalman Filter

---

* $X = N(\mu, \sigma^2)$ หมายความว่า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบ Gaussian (หรือ Normal) มีค่า Mean เท่ากับ μ และ Variance เท่ากับ σ^2 คุณสมบัติหนึ่งของตัวแปรสุ่มแบบ Gaussian คือ สามารถกำหนดกรอบของความมั่นใจได้ว่าประมาณ ๖๘%, ๙๕% และ ๙๙% ของค่าที่ได้จากการสุ่มทั้งหมดจะอยู่ในช่วง $\mu \pm \sigma$, $\mu \pm 2\sigma$ และ $\mu \pm 3\sigma$ ตามลำดับ ดังแสดงในภาพที่ 2a กล่าวโดยทั่วไป “***Variance เป็นเหมือนเกณฑ์ที่ใช้กำหนดว่าข้อมูลมีความแม่นยำมากน้อยเพียงไร ยิ่ง Variance มีค่าสูงความแม่นยำจะยิ่งน้อย***”



ภาพที่ ๒ การจำลองการเคลื่อนที่ของเรือและค่าที่วัดได้จาก Stadimeter

๓ Kalman Filter Algorithm

แม้ว่ารูปแบบมาตรฐานของ Kalman Filter Algorithm จะอยู่ในรูปของเมตริกซ์ เพื่อให้ใช้งานได้กับระบบที่มีสัญญาณเข้า-ออกหลายสัญญาณ (Multiple Input Multiple Output System) และเพื่อใช้ประมาณสถานะของระบบหลายๆ สถานะ ในบทความนี้จะนำเสนอ Kalman Filter Algorithm ในรูปของ Scalar เพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจแนวคิดพื้นฐานและหลักการทำงานของ Kalman Filter

Kalman Filter คือสูตรทางคณิตศาสตร์ใช้สำหรับหาค่าประมาณที่ดีที่สุดของสถานะของระบบ โดยนำข้อมูลเกี่ยวกับความไม่แน่นอน เช่น ความไม่แน่นอนของกลศาสตร์ของระบบ (System Dynamics), ความคลาดเคลื่อนของเซนเซอร์ (Measurement Noise) มาประกอบการพิจารณาบนพื้นฐานของความน่าจะเป็นในลักษณะที่เกื้อกูลกันอย่างดีที่สุด (Optimal) [๔, ๕] การใช้ Kalman Filter เริ่มต้นด้วยสมมุติฐานว่าเราสามารถเขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบในรูปของ Discrete-Time System Model ด้วยสมการ

$$x_k = \Phi_{k-1} x_{k-1} + w_k \qquad (๘)$$

$$z_k = H_k x_k + v_k \qquad (๙)$$

สมการที่ (๘) และ (๙) คือ Discrete-Time Process Model และ Measurement Model ตามลำดับ w_k และ v_k คือ Zero-Mean Gaussian White Noise ซึ่งหมายความว่า w_k และ v_k เป็นตัวแปรสุ่มแบบ Gaussian มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และกำหนดให้ Variance ของ w_k และ v_k มีค่าเป็น Q_k และ R_k ตามลำดับ คำว่า White หมายความว่าค่าของ w_k และ v_k ***ไม่เกี่ยวข้องกัน*** โดยสิ้นเชิง (Uncorrelated) (หรืออีกนัยหนึ่ง แม้ว่าเราจะรู้ค่าของ w หรือ v ณ เวลาหนึ่งๆ ก็ไม่สามารถนำมาใช้ทำนายค่าของ w หรือ v ณ เวลาอื่นๆ ได้) ในทางคณิตศาสตร์เราสามารถเขียนบรรยาย w และ v ได้ดังนี้

Mean ของ $w = E[w] = 0$, Variance ของ $w = E[w_k w_j] = \begin{cases} Q_k, k = j \\ 0, k \neq j \end{cases}$ (๑๐)

Mean ของ $v = E[v] = 0$, Variance ของ $v = E[v_k v_j] = \begin{cases} R_k, k = j \\ 0, k \neq j \end{cases}$ (๑๑)

Covariance ของ w และ v คือ $E[w_k v_j] = 0, \text{for all } k \text{ and } j$ (๑๒)

$E[\bullet]$ หมายถึง Expected Value

การใช้งาน Kalman Filter มีขั้นตอนดังนี้ ในขณะที่เซนเซอร์ยังไม่สามารถวัดค่าอะไรได้ เราสามารถประมาณค่าสถานะของระบบ x_k ณ เวลา $t = t_k$ ได้จากสมการ

$$\hat{x}_k^- = \Phi_{k-1} \hat{x}_{k-1} \qquad (๑๓)$$

เครื่องหมายลบเป็นการระบุว่า $\hat{x}_k$ เป็นค่าประมาณโดย***ไม่มี***ค่าที่เซนเซอร์วัดได้มาประกอบการพิจารณา การคาดการณ์ไปในอนาคตย่อมมีความไม่แน่นอน ให้ความคลาดเคลื่อนในการคาดการณ์คือ $e_k^- = x_k - \hat{x}_k^-$ (ความแตกต่างระหว่างสถานะจริงของระบบกับค่าที่เราคาดการณ์จากการคำนวณ) เนื่องจากสมมุติฐานที่ว่า w_k เป็นตัวแปรสุ่มแบบ Gaussian เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\hat{x}_k^-$ และ e_k^- จึงเป็นตัวแปรสุ่มแบบ Gaussian ด้วย โดยที่ e_k^- มีค่า Mean เป็นศูนย์ และมี Variance คือ

$$P_k^- = E\left[(e_k^-)^2\right] = \Phi_{k-1}^2 P_{k-1} + Q_k \qquad (๑๔)$$

เราสามารถใช้สมการที่ (๑๓) และ (๑๔) เพื่อคาดการณ์ค่าของ $x(t)$ และความน่าเชื่อถือของการคาดการณ์ (P_k^-) ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งเซนเซอร์สามารถวัดค่าได้ เมื่อเซนเซอร์วัดค่าได้ Kalman Filter จะนำค่าที่วัดได้มาประกอบการพิจารณาเพื่อหาค่าประมาณสถานะของระบบ ตามสมการ

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k\left(z_k - H_k\hat{x}_k^-\right) \quad (๑๕)$$

โดยที่

$$K_k = P_k^- H_k\left(P_k^- H_k^2 + R_k\right)^{-1} \quad (๑๖)$$

เครื่องหมายบวกเป็นการระบุว่า $\hat{x}_k$ เป็นค่าประมาณโดย***ได้นำ***ค่าที่เซนเซอร์วัดได้มาประกอบการพิจารณา สมการที่ (๑๕) คือสมการที่ใช้ Update ค่า $\hat{x}_k^-$ ที่เราคาดการณ์ไว้ล่วงหน้า (ก่อนที่เซนเซอร์จะวัดค่าได้) เมื่อพิจารณาจากสมการที่ (๑๕) และ (๙) แล้วจะเห็นว่า $H_k\hat{x}_k^-$ คือ สมการที่ใช้ประมาณค่าที่เซนเซอร์ควรวัดได้ ($\hat{z}_k$) คำนวณโดยใช้ค่าประมาณ $\hat{x}_k^-$ Kalman Filter จะทำงานโดยหา "*Residual*" $\left(z_k - H_k\hat{x}_k^-\right)$ ซึ่งเป็นผลต่างระหว่างค่าที่เซนเซอร์ควรวัดได้กับค่าที่วัดได้จริง นำมาให้น้ำหนักโดยการคูณด้วย Kalman Gain K_k แล้วนำผลที่ได้มาใช้แก้ไขค่า $\hat{x}_k^-$ ที่ได้คาดการณ์ไว้ล่วงหน้า

ผู้อ่านจะสังเกตได้ว่าค่าที่นำมาใช้แก้ไข $\hat{x}_k^-$ ขึ้นอยู่กับขนาดของ Residual และ K_k กล่าวโดยทั่วไป ถ้าผลต่างระหว่างค่าที่คาดการณ์กับค่าที่วัดได้จริงมีมากและข้อมูลมีความน่าเชื่อถือน้อย ค่า Kalman Gain K_k ที่คำนวณได้จะมีค่าสูง ทำให้ต้องแก้ไข $\hat{x}_k^-$ มาก ($K_k\left(z_k - H_k\hat{x}_k^-\right)$ มีค่ามาก) ในทางกลับกันถ้าผลต่างระหว่างค่าที่คาดการณ์ไว้กับค่าที่วัดได้จริงมีน้อยและข้อมูลมีความน่าเชื่อถือ ค่า Kalman Gain K_k ที่คำนวณได้จะมีค่าต่ำ ทำให้แก้ไข $\hat{x}_k^-$ เพียงเล็กน้อย ($K_k\left(z_k - H_k\hat{x}_k^-\right)$ มีค่าน้อย) โดยอัตโนมัติ การคำนวณค่า Kalman Gain K_k ตามสมการที่ (๑๖) เป็นการคำนวณที่ได้นำข้อมูลทางสถิติของระบบมาพิจารณาแล้วและเป็นค่า Gain ที่จะทำให้ P_k^+ มีค่าต่ำสุด จากมุมมองนี้ทำให้เป็นที่ยอมรับว่า Kalman Filter เป็น "*Optimal State Estimator*"

ในการหาค่าประมาณโดยใช้สมการที่ (๑๕) เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า ค่าความคลาดเคลื่อนของการประมาณ $e_k^+ = x_k - \hat{x}_k^+$ (หรืออีกนัยหนึ่งคือความแม่นยำของค่าที่คำนวณได้) เป็นตัวแปรแบบ Gaussian มี ค่า Mean เป็นศูนย์ และมี Variance คือ

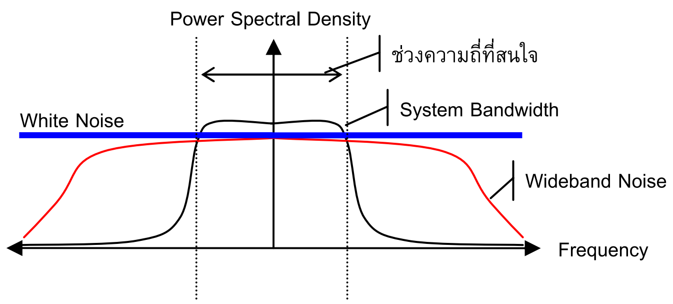
$$P_k^+ = E\left[\left(e_k^+\right)^2\right] = \left(1 - K_kH_k\right)^2 P_k^- + K_k^2 R_k \quad (๑๗)$$

สุดท้ายผู้อ่านจะสังเกตได้ว่า Kalman Filter ทำงานในลักษณะของการ Predict (คาดการณ์ล่วงหน้าว่าสถานะของระบบ $\hat{x}_k^-$ น่าจะเป็นอย่างไรโดยไม่ใช้ค่าจากเซนเซอร์) และการ Estimate (หาค่าประมาณ $\hat{x}_k^+$ เมื่อเซนเซอร์วัดค่าได้) ต่อไปจะเป็นการพิจารณาเกี่ยวกับสมมุติฐานที่ใช้ในการพัฒนา Kalman Filter Algorithm

๑. การตั้งสมมุติฐานว่า w_k และ v_k เป็นตัวแปรสุ่มแบบ Gaussian สมเหตุสมผลเพราะสาเหตุสองประการ ประการแรกตามทฤษฎี Central Limit Theorem ที่กล่าวไว้ว่าเมื่อนำตัวแปรสุ่มหลายตัว

มารวมกันผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นตัวแปรสุ่มแบบ Gaussian เนื่องจากสัญญาณรบกวน (Noise) ที่พบในชีวิตจริงมักมีที่มาจากแหล่งกำเนิดหลายแหล่งรวมกัน จึงสามารถประมาณได้ว่า Noise ที่พบในชีวิตจริงเป็นตัวแปรสุ่มแบบ Gaussian สอดคล้องกับ Central Limit Theorem [๔] ประการที่สอง โดยทั่วไปวิศวกรจะสามารถหาได้เพียงค่า Mean และ Variance ของตัวแปรสุ่มใดๆ จากการทดลอง ซึ่งเพียงพอสำหรับใช้บรรยาย Probability Density Function ของตัวแปรสุ่มแบบ Gaussian ได้อย่างสมบูรณ์ (ถ้าเป็นตัวแปรสุ่มแบบอื่นจำเป็นต้องมีข้อมูลมากกว่านี้) การที่สามารถบรรยาย Probability Density Function ได้สมบูรณ์ทำให้สูตรที่ใช้ใน Kalman Filter มีความสมบูรณ์ทางคณิตศาสตร์ (Tractable)

๒. การตั้งสมมุติฐานว่า w_k และ v_k เป็น White Noise สมเหตุสมผลแม้ว่า White Noise จะไม่มีในชีวิตจริง (เพราะ Power Spectral Density[†] ของ White Noise ครอบคลุมทุกความถี่ตั้งแต่ $-\infty$ ถึง $+\infty$) เนื่องจากในทางปฏิบัติระบบทุกระบบจะสามารถตอบสนองได้ในช่วงความถี่ที่จำกัด (Limited Bandwidth) ซึ่งต่ำกว่าช่วงความถี่ของสัญญาณรบกวนที่พบในชีวิตจริงโดยทั่วไป ดังนั้นเมื่อมองจากมุมมองของระบบที่มี Bandwidth จำกัด White Noise จึงไม่แตกต่างจาก Wideband Noise ที่พบในชีวิตจริง ดังแสดงใน ***ภาพที่ ๓*** นอกจากนี้การใช้สมมุติฐาน White Noise ช่วยลดความซับซ้อนของการพัฒนา Kalman Filter Algorithm และถ้าต้องการ เราสามารถเพิ่มเติม Noise ที่มีความเกี่ยวเนื่องกันในเวลา (Correlated) ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ด้วยเทคนิคทางคณิตศาสตร์



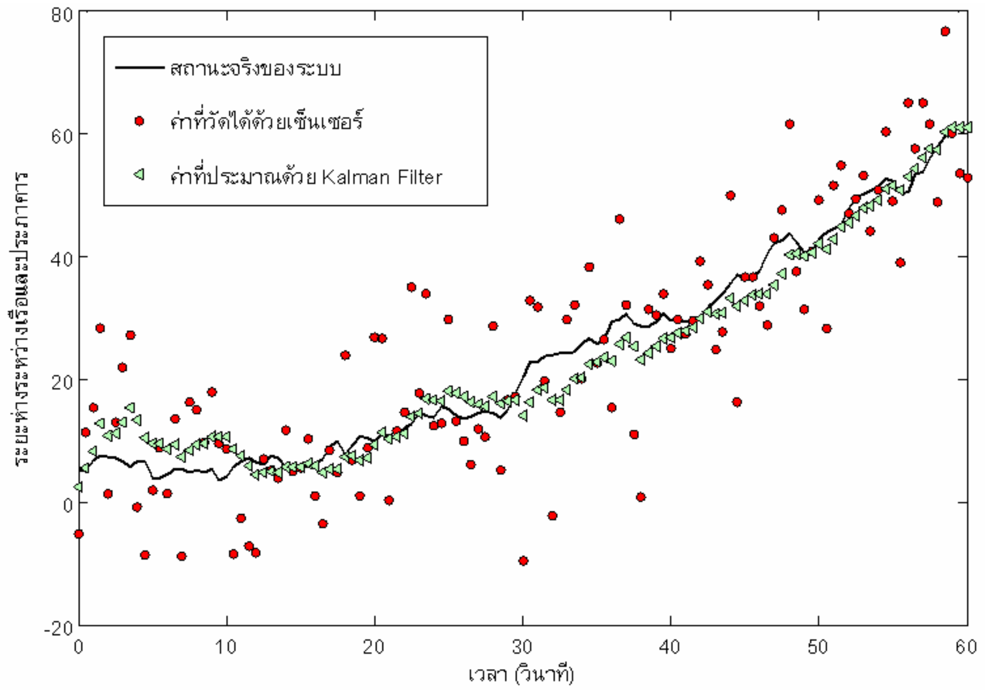
ภาพที่ ๓ System Frequency Response

---

† เราสามารถอ้างถึงกระบวนการสุ่ม (Random Process) ได้ ๓ วิธี [๓] คือ ๑. ระบุ Autocorrelation Function - $R(\tau)$, ๒. ระบุ Power Spectral Density Function - $S(j\omega)$ หรือ ๓. ระบุ Mean Squared Value - $E[X^2]$ วิธีที่ ๑. และ ๒. คือสิ่งเดียวกันเพราะ $R(\tau)$ กับ $S(j\omega)$ เป็น Fourier Transform Pair กล่าวโดยทั่วไป Power Spectral Density Function คือการแยกกระบวนการสุ่มออกเป็นองค์ประกอบย่อยๆ ในรูปของสัญญาณที่ความถี่ต่างๆ ดังนั้น “***ยิ่งกระบวนการสุ่มประกอบด้วยสัญญาณย่อยที่ความถี่ยิ่งสูงเท่าใด กระบวนการนั้นก็จะเป็นกระบวนการที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาเร็วมากขึ้นเท่านั้น***”

๔ ผลการจำลองการทำงานของ Kalman Filter

ภาพที่ ๔ แสดงผลการจำลองการประมาณระยะห่างระหว่างเรือและประภาคารด้วย Kalman Filter เมื่อใช้ Matlab M-file ดังแสดงใน ***ภาพที่ ๖***

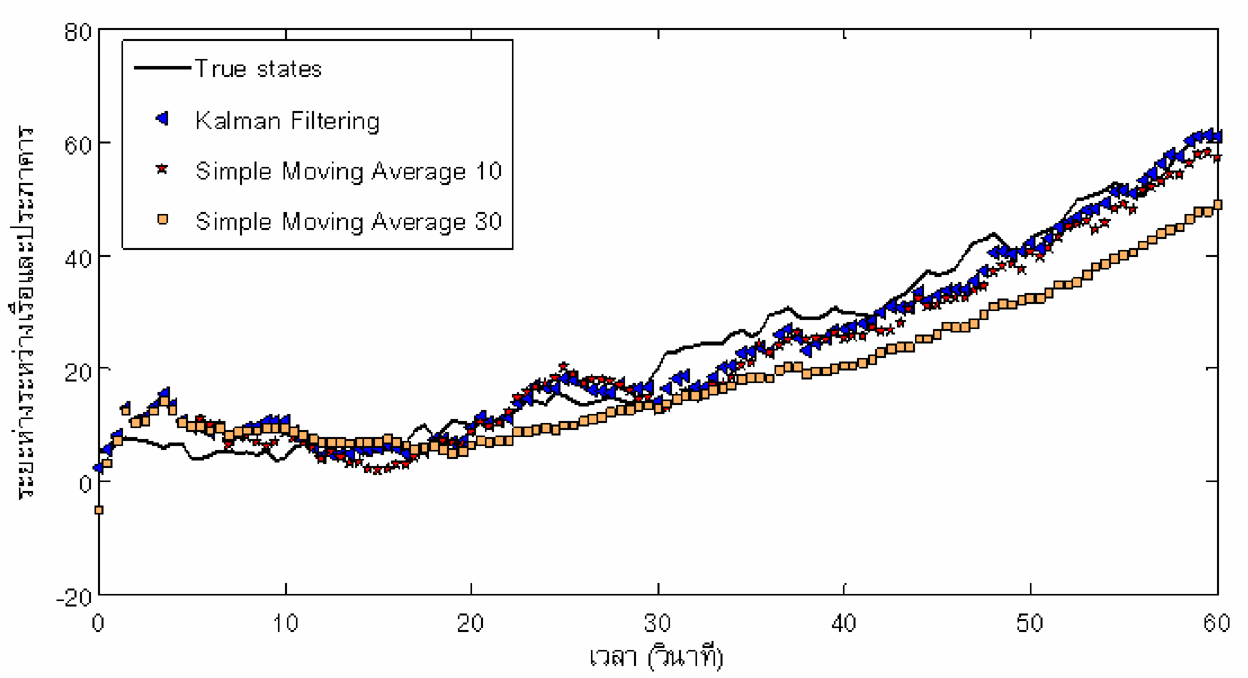


ภาพที่ ๔ ผลการจำลองการประมาณระยะห่างระหว่างประภาคารและเรือด้วย Kalman Filter

จาก ***ภาพที่ ๔*** จะเห็นได้ชัดว่า Kalman Filter สามารถประมาณสถานะของระบบคือ ระยะห่างระหว่างเรือและประภาคารได้อยู่ในเกณฑ์ดี สังเกตจากค่าประมาณมีค่าใกล้เคียงกับสถานะจริง และเรียบกว่าค่าที่วัดได้ด้วยเซนเซอร์ ที่เป็นเช่นนี้เพราะ Kalman Filter ใช้ความรู้เกี่ยวกับ Dynamics ของระบบ, คุณลักษณะทางสถิติของระบบและเซนเซอร์ และค่าที่วัดได้จากเซนเซอร์มาประมวลผลประกอบกันบนหลักการของความน่าจะเป็น เพื่อหาค่าประมาณของสถานะของระบบที่ดีที่สุด

จากโปรแกรมใน ***ภาพที่ ๖*** จะสังเกตได้ว่า Kalman Filter มีลักษณะเด่นอย่างหนึ่งคือเป็นการประมวลผลแบบ Recursive หมายความว่า ใช้เฉพาะข้อมูลจากเวลาก่อนหน้า $t = t_{k-1}$ เพียงค่าเดียวเท่านั้นเพื่อคำนวณสถานะที่เวลาปัจจุบัน $t = t_k$ ข้อดีของการประมวลผลแบบ Recursive คือไม่ต้องใช้หน่วยความจำมาก ต่างกับการหาค่าประมาณด้วยวิธีอื่น เช่น Simple Moving Average ซึ่งจะต้องกำหนดขนาด Sample Size และเก็บข้อมูลไว้ประมวลผลพร้อมกันทีเดียว ทำให้ต้องใช้หน่วยความจำมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งถ้า Sample Size มีขนาดใหญ่

ภาพที่ ๕ เป็นการเปรียบเทียบการประมาณสถานะของระบบด้วย Kalman Filter กับวิธี Simple Moving Average ที่ใช้ขนาด Sample Size เท่ากับ ๑๐ และ ๓๐ ผลที่แสดงใน ***ภาพที่ ๕*** อาจทำให้หลายคนแปลกใจเพราะไม่เป็นไปตามที่ทราบโดยทั่วไปว่ายิ่งใช้ Sample Size ยิ่งมากจะยิ่งให้ค่าเฉลี่ยใกล้เคียงกับความเป็นจริง ดังจะเห็นได้ชัดว่า Simple Moving Average ขนาด ๓๐ ไม่สามารถประมาณสถานะของระบบได้ดีเท่า Kalman Filter (ที่จริงมีความคลาดเคลื่อน (Divergence) ค่อนข้างสูง) ที่เป็นเช่นนี้เพราะระบบมีการเปลี่ยนแปลงสถานะตามเวลา (Dynamics) ทำให้ Simple Moving Average ไม่สามารถติดตามสถานะได้อย่างแม่นยำ ผลที่แสดงใน ***ภาพที่ ๕*** เป็นการยืนยันถึงความสามารถและจุดแข็งของ Kalman Filter ซึ่งเหมาะกับการประมาณสถานะของระบบ Dynamics



ภาพที่ ๕ เปรียบเทียบประสิทธิภาพของ Kalman Filter กับ Simple Moving Average

```
clc, close all, clear all
% Initial analysis
dt = 0.5, t = 0:dt:60; % Set sampling time
F = .03, phi = exp(F*dt); % State transition Constant
wsigma = 1, vsigma = 10 % Process and measurement noise standard deviation
u = 0; % Mean value
wk = wsigma*randn(1,length(t))+u; % Generate process noise
vk = vsigma*randn(1,length(t))+u; % Generate stadimeter noise
xe = zeros(size(wk)); z=xe;
% Use xe as true states of the system
xe(1) = abs(wsigma*randn)+10*(1856/3600); % Set the initial condition to be 10 nautical mile/hour
z(1) = xe(1)+vk(1);
for k = 2:length(t)
        xe(k) = phi*xe(k-1)+wk(k);
        z(k) = xe(k)+vk(k);
end
% Plot stadimeter noise samples
sigma1 = ones(size(t))*vsigma; sigma2 = 2*sigma1; sigma3 = 3*sigma1;
subplot(2,1,1), plot(t,vk,'ro',t,sigma1,'k:',t,-sigma1,'k:',...
   t,sigma2,'k-.',t,-sigma2,'k-.',t,sigma3,'k--',t,-sigma3,'k--')
% Plot system state
subplot(2,1,2), plot(t,xe,t,z,'o')
% Perform Kalman Filtering
x_minus = 10; P_minus = 10^2; % Initial conditions
Phik = phi; Qk = wsigma^2; Hk = 1; Rk = vsigma^2;
for k = 1:length(t)
        % Estimate
        Kk = P_minus*Hk*inv(P_minus*(Hk^2)+Rk);
        x_plus(k) = x_minus + Kk*(z(k)-Hk*x_minus);
        P_plus = ((1-Kk*Hk)^2)*P_minus+(Rk*Kk^2);
        % Predict
        x_minus = Phik*x_plus(k);
        P_minus = P_plus*Phik^2+Qk;
end
% Plot results
figure, plot(t,xe,t,z,'ro',t,x_plus,'bs')
xlabel('เวลา (วินาที)'), ylabel('ระยะห่างระหว่างเรือและประภาคาร')
legend('สถานะจริงของระบบ','ค่าที่วัดได้ด้วยเซ็นเซอร์','ค่าที่ประมาณด้วย Kalman Filter')
```

ภาพที่ ๖ Matlab M-file สำหรับจำลองการประมาณระยะห่างระหว่างประภาคารและเรือ

๕ สรุป

บทความนี้ได้พยายามนำเสนอว่า Kalman Filter คืออะไรและใช้งานอย่างไร โดยเน้นแนวทางและตัวอย่างที่ไม่ซับซ้อน เพื่อให้ผู้อ่านสามารถทำความเข้าใจแนวคิดพื้นฐานที่เป็นสาระสำคัญโดยง่ายมากกว่าที่จะดึงให้ผู้อ่านต้องศึกษาทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนเกี่ยวกับ Kalman Filter จากตัวอย่างผลการจำลอง การทำงานของ Kalman Filter จะเห็นได้ว่า Kalman Filter คือ สูตรทางคณิตศาสตร์ใช้สำหรับประมาณสถานะของระบบที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (Dynamics) โดยนำหลักการทางสถิติและความน่าจะเป็นมาประยุกต์ใช้ประกอบการวิเคราะห์ บทความนี้ได้นำเสนอจุดแข็งของ Kalman Filter ในแง่ที่เป็น Recursive Algorithm ทำให้ประหยัดหน่วยความจำในการประมวลผล และความสามารถในการ

ติดตามประมาณค่าสถานะของระบบ Dynamics เปรียบเทียบกับวิธี Simple Moving Average หวังเป็นอย่างยิ่งว่าบทความนี้จะเป็นจุดเริ่มต้นและมีส่วนช่วยให้ผู้สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ด้วยตนเองและสามารถนำ Kalman Filter ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตจริงในระดับสูงต่อไป

เอกสารอ้างอิง

๑. Kalman, R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems, Transaction of the ASME, Journal of Basic Engineering, March, 1960, p. 35-45.

๒. Leonard, A. McGee and Stanley F. Schmidt.. Discovery of the Kalman Filter as a practical tool for aerospace and industry, NASA Technical Memorandum 86847, November, 1985.

๓. Brown, Robert Grove and Patrick Y. C. Hwang. Introduction to random signals and applied Kalman filtering. John Wiley & Sons., 1997.

๔. Peter, S. Maybeck. Stochastic models, estimation, and control Vol.1, Academic Press Inc., 1979.

๕. Gelb, Arthur. Applied optimal estimation, The analytic sciences corporation, 1974.