

การแสดงผลมุมเอียงและการเปลี่ยนแกนอ้างอิง

น.ต.ดร. กฤษฎา แสงเพชรส่อง
อาจารย์ฝ่ายศึกษา โรงเรียนนายเรือ

๑. บทคัดย่อ

การแสดงผลว่าวัตถุทำมุมเอียงอย่างไรกับแกนอ้างอิง (Orientation Representation) และการเปลี่ยนแกนอ้างอิงของเวกเตอร์ (Coordinate Transformation) เป็นพื้นฐานสำคัญที่ถูกใช้งานในหลายสาขา เช่น ในระบบหาดำบลที่ในงาน Computer Graphics สามมิติ หรือในการวิเคราะห์ระบบที่ประกอบด้วยหลายจุดเชื่อมต่อ เป็นต้น บทความนี้สรุปทฤษฎีเบื้องต้นเกี่ยวกับ Orientation Representation และ Coordinate Transformation ที่เป็นที่ยอมรับใช้งานอย่างกว้างขวาง ๓ วิธีได้แก่ Direction Cosine Matrix, Euler Angle และ Quaternion

๒. บทนำ

Dead Reckoning คือหลักการหาตำแหน่งโดยนำขนาดและทิศทางของความเร็วมาคำนวณหาทิศทางและระยะทางของการเคลื่อนที่ เช่น ถ้ารู้ว่าวัตถุ (body) กำลังเคลื่อนที่ไปทางทิศเหนือด้วยความเร็ว ๘๐ กิโลเมตรต่อชั่วโมง หลังจากเวลาผ่านไปครึ่งชั่วโมงตำแหน่งของวัตถุคือทางเหนือของจุดเริ่มต้นเป็นระยะ ๔๐ กิโลเมตร

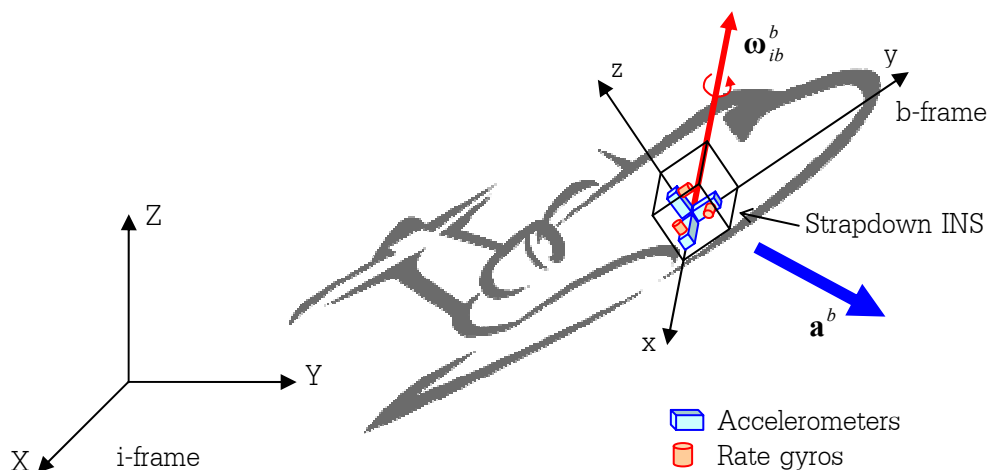


Figure 1 Strapdown INS operating concept

Figure 1 แสดงหลักการทำงานของ Strapdown Inertial Navigation System (INS) ในการหาตำแหน่งของเครื่องบิน ใน Strapdown INS ประกอบด้วย Accelerometers และ Rate Gyros ซึ่งเป็นเซนเซอร์ใช้วัดความเร่งเชิงเส้น \mathbf{a}^b และความเร็วเชิงมุม $\boldsymbol{\omega}_{bi}^b$ ตามลำดับ โดยหลักการแล้ว Strapdown INS นำข้อมูลความเร็วเชิงมุมที่ Rate Gyros วัดได้มาคำนวณหาทิศทางของการเคลื่อนที่ เพื่อใช้ประกอบกับข้อมูลความเร่งเชิงเส้นที่ Accelerometers วัดได้ในการคำนวณหาความเร็วและระยะทางของการเคลื่อนที่ โดยอาศัยหลักการ Dead Reckoning ตามที่อธิบายไปแล้วในช่วงต้น

นอกจากระบบนำร่องแบบ Strapdown INS แล้ว การแสดงว่าวัตถุทำมุมเอียงอย่างไรกับแกนอ้างอิง (Orientation Representation) และการเปลี่ยนแกนอ้างอิงของเวกเตอร์ (Coordinate Transformation) เป็นความรู้พื้นฐานที่สำคัญที่ถูกใช้งานในอีกหลายสาขา เช่น ในการแสดงภาพสามมิติ (Computer Graphics) หรือในการวิเคราะห์ระบบที่ประกอบด้วยจุดเชื่อมต่อหลายจุด (เช่น แขนกล) เป็นต้น บทความนี้สรุปทฤษฎีเบื้องต้นเกี่ยวกับ Orientation Representation และ Coordinate Transformation ที่เป็นที่ยอมรับใช้งานอย่างกว้างขวาง ๓ วิธีได้แก่ Direction Cosine Matrix, Euler Angle (อ่านว่าออยเลอร์) และ Quaternion พร้อมทั้งเปรียบเทียบข้อดีข้อเสียของแต่ละวิธี

การวิเคราะห์เกี่ยวกับ Orientation และ Coordinate Transformation โดยทั่วไปใช้สมมติฐานของ Cartesian Coordinate (แกน X-Y-Z ตั้งฉากซึ่งกันและกัน) และกำหนดเครื่องหมาย (Sign Convention) ตาม Right Hand Rule กล่าวคือ ให้ XYZ เป็นแกนอ้างอิง (reference frame) แบบ Cartesian ทิศบวกของแกน X-Y-Z จะชี้ไปตามทิศของนิ้วชี้ นิ้วกลาง และนิ้วโป้งของมือขวา ตามลำดับ เมื่อใช้มือขวากำรอบแกนที่หมุนโดยให้นิ้วโป้งชี้ไปในทิศบวกของแกนที่หมุนนั้น การหมุนมีค่าเป็นบวกเมื่อหมุนตามทิศของนิ้วที่เหลือทั้ง ๔ ดังแสดงใน Figure 2

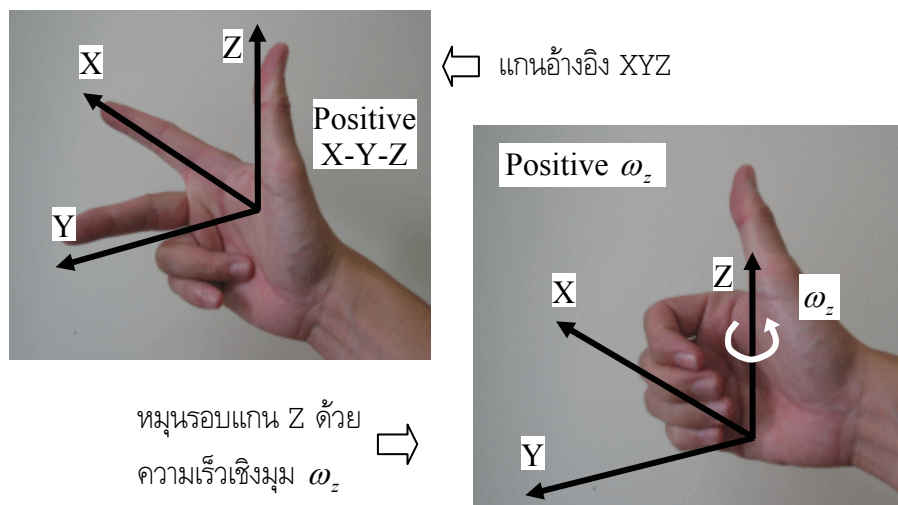


Figure 2 Assumptions และ Sign Convention

การวิเคราะห์ปัญหาของ Orientation และ Coordinate Transformation สามารถพิจารณาได้ดังนี้ กำหนดให้มีแกนอ้างอิง ๒ แกนคือ i-frame (XYZ) และ b-frame (xyz) ดังแสดงใน Figure 3 โดยที่ i-frame หยุดหนึ่งไม่เคลื่อนที่ (Inertia), b-frame หมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\omega_{ib}^b = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ (subscript *ib* ใช้ระบุว่าเป็นความเร็วเชิงมุมของ b-frame สัมพัทธ์กับ i-frame, superscript *b* ใช้ระบุว่าเป็นเวกเตอร์ที่เขียนบรรยายใน b-frame และ superscript *T* หมายถึง Transpose) ดังนั้นเวกเตอร์ ω_{ib}^b มีขนาดขององค์ประกอบในแกน x, y และ z คือ ω_x , ω_y และ ω_z ตามลำดับ ให้ \mathbf{r} คือเวกเตอร์อิสระใดๆ ปัญหาของ Coordinate Transformation คือ จะสามารถเขียนบรรยายเวกเตอร์อิสระ \mathbf{r} ใน i-frame (\mathbf{r}^i) และ b-frame (\mathbf{r}^b) ได้อย่างไร

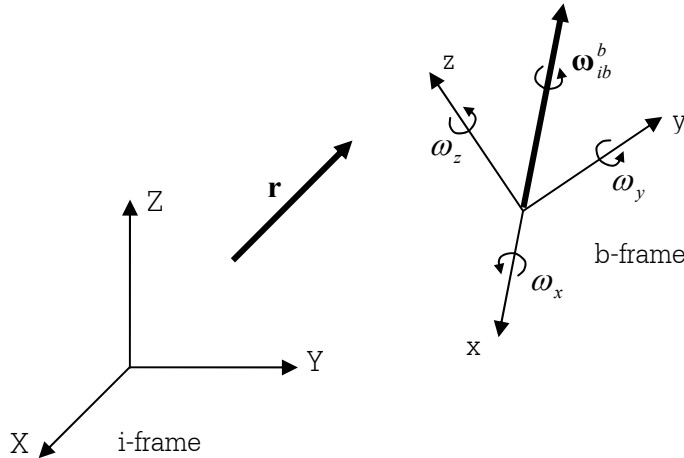


Figure 3 Rotating Reference Frame

Figure 4 แสดงตัวอย่างการเปลี่ยนแกนอ้างอิง กำหนดให้ตอนเริ่มต้น ($t=0$) i-frame และ b-frame ซ้อนทับกันโดยที่ แกน X ทับแกน x, แกน Y ทับแกน y และ แกน Z ทับแกน z พอดี ให้ \mathbf{r} เป็นเวกเตอร์อิสระมีขนาด ๑ หน่วยในทิศบวกของ X เราสามารถเขียน \mathbf{r} ใน i-frame และ b-frame ณ เวลา $t=0$ ได้เป็น $\mathbf{r}^i(0) = \mathbf{r}^b(0) = [1 \ 0 \ 0]^T$ ดังแสดงใน Figure 4a กำหนดให้ b-frame หมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ๑ องศาต่อวินาทีรอบแกน z ($\omega_{ib}^b = [0 \ 0 \ 1]^T$) ดังนั้นที่เวลา $t=90\text{sec}$ b-frame หมุนไปได้ ๙๐ องศา ดังแสดงใน Figure 4b ทำให้สามารถเขียนเวกเตอร์ \mathbf{r} ใน b-frame ได้ใหม่เป็น $\mathbf{r}^b(90) = [0 \ -1 \ 0]^T$

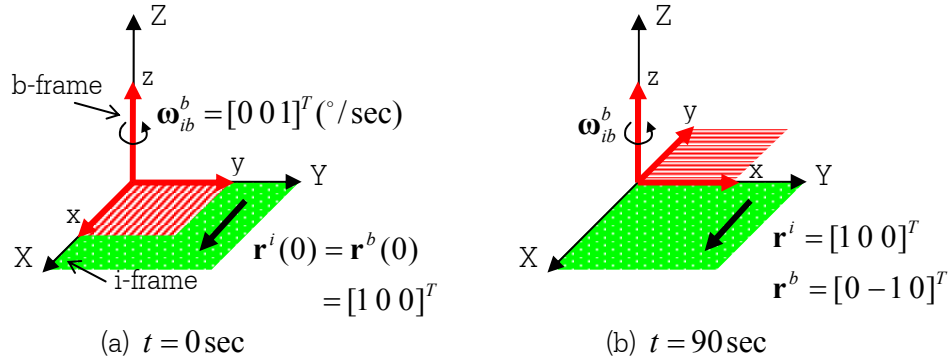


Figure 4 Coordinate Transformation with Rotating Reference Frame

๓. Direction Cosine Matrix

กำหนดให้ $\mathbf{r}^i = [x^i \ y^i \ z^i]^T$ และ $\mathbf{r}^b = [x^b \ y^b \ z^b]^T$ คือเวกเตอร์ใน i-frame และ b-frame ตามลำดับ Direction Cosine Matrix (DCM) \mathbf{C}_b^i คือ เมทริกซ์ (Transformation Matrix) ที่ใช้เปลี่ยนเวกเตอร์ \mathbf{r}^b เป็นเวกเตอร์ \mathbf{r}^i เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง \mathbf{C}_b^i , \mathbf{r}^i และ \mathbf{r}^b ได้คือ

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{C}_b^i \mathbf{r}^b = \begin{bmatrix} x^i \\ y^i \\ z^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^b \\ y^b \\ z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}x^b + c_{12}y^b + c_{13}z^b \\ c_{21}x^b + c_{22}y^b + c_{23}z^b \\ c_{31}x^b + c_{32}y^b + c_{33}z^b \end{bmatrix} \quad (1)$$

c_{jk} คือ cosine ของมุมระหว่างแกน j^{th} ของ i-frame และแกน k^{th} ของ b-frame ($j^{th} = 1, 2, 3$ คือแกน X, Y, Z และ $k^{th} = 1, 2, 3$ คือ แกน x, y, z ตามลำดับ) เราสามารถกล่าวได้ว่าการใช้ DCM คือการแตกแรงของ \mathbf{r}^b ในแนวแกน x-y-z ไปตามแนวแกน X-Y-Z ใน i-frame ด้วย dot product DCM มีคุณสมบัติที่สำคัญคือเป็น Orthogonal Matrix กล่าวคือ

$$[\mathbf{C}_b^i]^{-1} = [\mathbf{C}_b^i]^T = \mathbf{C}_i^b \quad (2)$$

$[\mathbf{C}_b^i]^{-1}$ คือ Inverse ของ \mathbf{C}_b^i และ $[\mathbf{C}_b^i]^T$ คือ Transpose ของ \mathbf{C}_b^i เราสามารถใช้ DCM เพื่อแสดงว่าวัตถุทำมุมเอียงกับแกนอ้างอิงอย่างไร เช่น จากกรณีข้างต้น หากกำหนดให้ b-frame เป็นแกนอ้างอิงที่ยึดติดกับวัตถุ (body frame) และ i-frame เป็นแกนอ้างอิงที่ยึดติดกับผิวโลก \mathbf{C}_b^i จะเป็นตัวบ่งชี้ว่า ณ เวลาหนึ่ง วัตถุทำมุมเอียงกับผิวโลกอย่างไร

สมมติให้วัตถุหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ดังนั้นมุมเอียงของวัตถุ (และ DCM) จะเปลี่ยนแปลงตามเวลา เราสามารถคำนวณการเปลี่ยนแปลงตามเวลาของ DCM ได้โดยกำหนดให้

$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z]^T$ เป็นเวกเตอร์มุมของการหมุน (rotation angle vector) ที่เมื่อหมุน b-frame ที่เวลา t_k โดยใช้ $\boldsymbol{\sigma}$ เป็นแกนหมุนด้วยมุมขนาด $|\boldsymbol{\sigma}| = \sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}$ จะได้ผลลัพธ์คือ b-frame ที่เวลา t_{k+1}

เขียน σ ในรูปของ Skew-symmetric ได้ $[\sigma \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_z & \sigma_y \\ \sigma_z & 0 & -\sigma_x \\ -\sigma_y & \sigma_x & 0 \end{bmatrix}$

ให้ b_k และ b_{k+1} เป็นหมายถึง b-frame ที่เวลา t_k และ t_{k+1} ตามลำดับ เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$C_{b_{k+1}}^n = C_{b_k}^n C_{b_{k+1}}^{b_k} = C_{k+1} = C_k \exp[\sigma \times]$$

$$C_{b_{k+1}}^{b_k} = \exp[\sigma \times] = I + [\sigma \times] + \frac{[\sigma \times]^2}{2!} + \frac{[\sigma \times]^3}{3!} + \frac{[\sigma \times]^4}{4!} + \dots$$

$$C_{b_{k+1}}^{b_k} = I + \sin \sigma \frac{[\sigma \times]}{\sigma} + (1 - \cos \sigma) \left(\frac{[\sigma \times]}{\sigma} \right)^2 \quad (3)$$

หรือ

$$C_{b_{k+1}}^{b_k} = I + a_1 [\sigma \times] + a_2 [\sigma \times]^2 \quad (4)$$

$$a_1 = 1 - \frac{\sigma^2}{3!} + \frac{\sigma^4}{5!} - \dots \quad \text{และ} \quad a_2 = \frac{1}{2!} - \frac{\sigma^2}{4!} + \frac{\sigma^4}{6!} - \dots$$

สำหรับการหมุนด้วยมุมที่มีขนาดเล็ก ($\sigma = [\delta\sigma_x \quad \delta\sigma_y \quad \delta\sigma_z]^T$ ให้ $\delta\sigma_x \rightarrow 0$, $\delta\sigma_y \rightarrow 0$, $\delta\sigma_z \rightarrow 0$) เราสามารถประมาณค่า $C_{b_{k+1}}^{b_k}$ ได้จาก

$$C_{b_{k+1}}^{b_k} \approx I + [\Psi \times] \quad \text{where} \quad [\Psi \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\delta\sigma_z & \delta\sigma_y \\ \delta\sigma_z & 0 & -\delta\sigma_x \\ -\delta\sigma_y & \delta\sigma_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

เราสามารถหาเวกเตอร์มุมของการหมุน σ จากความเร็วเชิงมุม ω ได้คือ

$$\sigma = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \omega dt \quad (6)$$

โดยทั่วไป ถ้า ω มีการเปลี่ยนแปลงทิศทางในช่วงเวลาที่พิจารณา เราจะไม่สามารถหาค่า σ ได้อย่างแม่นยำด้วยการรวม (sum) ค่าของมุมที่เพิ่มขึ้นเนื่องจากความเร็วในช่วงเวลาสั้น ๆ (Direct Numerical Integration ของ (6) และในทางทฤษฎี closed-form solution ของ σ สำหรับการเคลื่อนที่ โดยทั่วไปสามารถหาได้จาก

$$\dot{\sigma} = \omega + \frac{1}{2} \sigma \times \omega + \frac{1}{\sigma^2} \left\{ 1 - \frac{\sigma \sin \sigma}{2(1 - \cos \sigma)} \right\} \sigma \times (\sigma \times \omega) \quad (7)$$

อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติ เราสามารถหา σ จาก (6) โดยเขียน sin และ cos ในรูปของ series expansion แล้วไม่พิจารณาเทอมที่มี order สูง เช่น (8) คือ 4th order approximation ของ (6)

$$\dot{\sigma} = \omega + \frac{1}{2}\sigma \times \omega + \frac{1}{12}\sigma \times (\sigma \times \omega) \quad (8)$$

นอกจากนี้ เรายังสามารถประมาณ σ ได้จาก

$$\sigma = \alpha(t_{k+1}) + \delta\alpha(t_{k+1}) \quad (9)$$

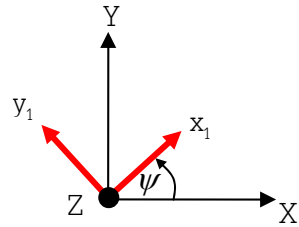
$$\text{โดยที่ } \delta\alpha(t) = \frac{1}{2} \int_{t_k}^t (\alpha \times \omega) dt \text{ และ } \alpha(t) = \int_{t_k}^t \omega dt$$

๔. Euler Angles

Euler Angles เป็นอีกวิธีหนึ่งสำหรับใช้แสดงว่าวัตถุเอียงทำมุมกับแกนอ้างอิงอย่างไร นิยามของ Euler Angles คือมุมที่เมื่อหมุน i-frame ตามลำดับดังนี้แล้วจะได้ b-frame

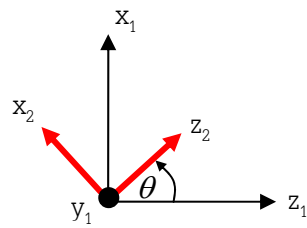
๑. มุม Yaw ψ รอบแกน z ของ i-frame
๒. มุม Pitch θ รอบแกน y ของ i-frame
๓. มุม Roll ϕ รอบแกน x ของ i-frame

การหมุน i-frame ตามลำดับ Yaw-Pitch-Roll ที่กำหนดข้างต้นมีความสำคัญ เพราะการหมุนแกนด้วยลำดับที่ต่างกันจะทำให้ได้ผลลัพธ์คือ Transformation Matrix ที่ต่างกัน เมื่อหมุนแกนตามลำดับข้างต้นแล้วจะได้ Transformation Matrix ในรูปของ Euler Angles คือ



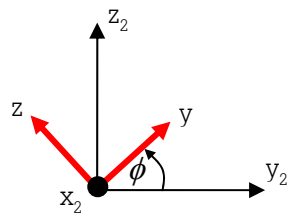
$$C_i^1 = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ในภาพนี้แกน Z ฟุ้งออกจากกระดาษ



$$C_1^2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

ในภาพนี้แกน y1 ฟุ้งออกจากกระดาษ



$$C_2^b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

ในภาพนี้แกน X2 ฟุ้งออกจากกระดาษ

รูปที่ ๕ Transformation Matrix from Euler Angles

$$C_i^b = C_2^b C_1^2 C_i^1 = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$C_i^b = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (10)$$

เราสามารถใส่สมการตามรูปที่ ๕ เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนแปลงของ Euler Angles ตามความเร็วเชิงมุมของวัตถุ (หรือ b-frame) ได้จาก

$$\omega_{ib}^b = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2^b \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + C_2^b C_1^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (11)$$

เราสามารถเขียนและจัดรูป (11) ได้ใหม่เป็น

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= (\omega_y \sin \phi + \omega_z \cos \phi) \tan \theta + \omega_x \\ \dot{\theta} &= \omega_y \cos \phi - \omega_z \sin \phi \\ \dot{\psi} &= (\omega_y \sin \phi + \omega_z \cos \phi) \sec \theta\end{aligned}\quad (12)$$

๕. Quaternion

พิจารณา complex number ในรูปของ polar $z_1 = e^{i\theta_1}$ (z_1 ถูก normalized ให้มีขนาดเท่ากับ 1) และให้ complex number $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ เมื่อคูณ complex numbers ทั้งสองจะได้ $z_1 z_2 = r_2 e^{i(\theta_2 + \theta_1)}$ จะเห็นได้ว่าการคูณกันของ normalized complex number เทียบเท่ากับการหมุนเวกเตอร์ใน ๒ มิติ ในลักษณะเดียวกัน Quaternion เปรียบเสมือนการเขียน complex number ขึ้นสูงเพื่อหมุนเวกเตอร์ใน ๓ มิติ

กำหนดให้ $\sigma = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z]^T$ เป็นเวกเตอร์มุมของการหมุน (rotation angle) เช่นเดียวกับที่บรรยายในหัวข้อ Direction Cosine Matrix นิยามของ Quaternion \mathbf{q} คือ

$$\mathbf{q} = \left[\cos \frac{\sigma}{2} \quad \frac{\sigma_x}{\sigma} \sin \frac{\sigma}{2} \quad \frac{\sigma_y}{\sigma} \sin \frac{\sigma}{2} \quad \frac{\sigma_z}{\sigma} \sin \frac{\sigma}{2} \right]^T = [a \ b \ c \ d]^T \quad (13)$$

ให้ $N = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ เราสามารถหา normalized \mathbf{q} ได้จาก

$$\tilde{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}}{N} = \frac{1}{N} [a \ b \ c \ d]^T = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T \quad (14)$$

เราสามารถเปลี่ยนแกนอ้างอิงระหว่าง i-frame และ b-frame โดยการคูณ normalized \mathbf{q} ดังนี้

$$\mathbf{r}^i = \tilde{\mathbf{q}} \mathbf{r}^b \tilde{\mathbf{q}}^* \quad (15)$$

และ

$$\mathbf{r}^b = \tilde{\mathbf{q}}^* \mathbf{r}^i \tilde{\mathbf{q}} \quad (16)$$

$\tilde{\mathbf{q}}^* = [q_0 \ -q_1 \ -q_2 \ -q_3]^T$ คือ complex conjugate ของ $\tilde{\mathbf{q}}$

เราสามารถเขียน (15) ในรูปของ Matrix Multiplication ได้คือ

$$\mathbf{r}^i = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_0 q_2 - q_1 q_3) \\ 2(q_0 q_3 - q_1 q_2) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_0 q_1 - q_2 q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix} \mathbf{r}^b = \mathbf{C}_b^i \mathbf{r}^b \quad (17)$$

เราสามารถหาความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนแปลงของ \mathbf{q} กับความเร็วเชิงมุมของวัตถุ (b-frame) ได้จากการคูณ quaternion

$$\dot{\mathbf{q}} = 0.5\mathbf{q}\mathbf{p} \tag{18}$$

หรือในรูปของเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \tag{19}$$

โดยที่ $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ และ $\mathbf{p} = [0 \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ ถ้าความเร็วเชิงมุม $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ คงที่ในช่วงเวลาสั้นๆ ที่พิจารณา เราสามารถเขียนได้ว่า

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{r}_k \tag{20}$$

$$\mathbf{r}_k = [a_c \ a_s\sigma_x \ a_s\sigma_y \ a_s\sigma_z]^T$$

$$a_c = \cos(\sigma/2) = 1 - \frac{(0.5\sigma)^2}{2!} + \frac{(0.5\sigma)^4}{4!} - \dots$$

$$a_s = \frac{\sin(\sigma/2)}{2} = 0.5 \left\{ 1 - \frac{(0.5\sigma)^2}{2!} + \frac{(0.5\sigma)^4}{4!} - \dots \right\}$$

$$(0.5\sigma)^2 = 0.25(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)$$

ในขณะที่ \mathbf{q}_k คือ quaternion ที่บรรยายความสัมพันธ์ระหว่าง i-frame และ b-frame จะเห็นได้ว่า \mathbf{r}_k คือ quaternion ที่บอกความสัมพันธ์ระหว่าง b-frame ที่เวลา t_k กับ t_{k+1} σ คือเวกเตอร์มุมของการหมุน (rotation angle) ซึ่งสามารถหาได้ตามที่บรรยายในหัวข้อ Direction Cosine Matrix

๖. ข้อพิจารณาในการประยุกต์ใช้งานจริง

Table 1 สรุปข้อดีข้อเสียของวิธี DCM, Euler Angles, Quaternion

วิธี	ข้อดี	ข้อเสีย
Direction Cosine Matrix	ไม่มีปัญหา Gimbals Lock	ใช้ตัวแปรมากที่สุด ๙ ตัว
Euler Angles	๑. ให้ความหมายทางกายภาพที่ชัดเจน (มุม roll, pitch, yaw) ๒. ใช้ตัวแปรน้อยที่สุดคือ ๓ ตัว	มีปัญหาเกี่ยวกับ Gimbals Lock ใน (12) เมื่อมุม pitch θ เข้าใกล้ ๙๐ องศา $\tan \theta \rightarrow \infty$)

วิธี	ข้อดี	ข้อเสีย
Quaternion	๑. ไม่มีปัญหา Gimbal Lock ๒. ใช้ตัวแปรน้อยกว่า DCM	การคำนวณมาก เทอมยกกำลังสองใน (17)

Table 1 เป็นการสรุปข้อดีข้อเสียของวิธี DCM, Euler Angles, Quaternion

จะเห็นได้จากการบรรยายก่อนหน้านี้ว่าสิ่งสำคัญที่จะทำให้สามารถคำนวณมุมเอียงของวัตถุเทียบกับแกนอ้างอิงได้คือจำเป็นต้องรู้ความเร็วเชิงมุมของวัตถุนั้น ๆ โดยปกติเรามักตั้งสมมุติฐานว่าเรารู้/สามารถวัดความเร็วเชิงมุมได้อย่างแม่นยำ โดยไม่มีความคลาดเคลื่อน สมมุติฐานนี้อาจเป็นจริงในเฉพาะบางกรณีเท่านั้น เช่น การแสดงภาพสามมิติด้วยคอมพิวเตอร์ (animation/simulation) ซึ่งผู้เขียนโปรแกรมรู้แน่นอนว่าวัตถุในภาพแต่ละชิ้นเคลื่อนที่อย่างไรก็ตามมีการใช้งานอีกหลายประเภทในชีวิตจริงที่ไม่รู้ค่าความเร็วเชิงมุมอย่างแน่นอน และทำให้ต้องวัดค่าเหล่านี้ด้วยเซนเซอร์ซึ่งจะต้องถูกรบกวนโดย Noise ทำให้ค่าความเร็วเชิงมุมที่วัดได้มีความคลาดเคลื่อน ยกตัวอย่างเช่น ในระบบ Strapdown INS เป็นต้น

เนื่องจากการหามุมเอียงเป็นการ Integrate ความเร็วเชิงมุม ดังนั้นค่าความคลาดเคลื่อนของเซนเซอร์จะถูกถ่ายทอดและสะสมอยู่ในค่าของมุมเอียงที่คำนวณได้ ด้วยเหตุนี้ ทำให้โดยมากค่าความคลาดเคลื่อนของมุมเอียงที่คำนวณได้จึงเพิ่มสูงขึ้นตามเวลา และจำเป็นต้องใช้เทคนิคอื่น ๆ เช่น Kalman Filtering เพื่อนำข้อมูลจากเซนเซอร์อื่น ๆ มาใช้ประกอบกันและป้องกันไม่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนเพิ่มขึ้นตามเวลา

Figure 6 แสดงผลการจำลอง Monte Carlo จำนวน 30 runs ของการคำนวณมุมอ้างอิง Roll และ Pitch ของวัตถุภายในเวลา ๖๐ วินาที ด้วยวิธี Integrated Rate gyros/Accelerometers ซึ่งใช้ Kalman Filter เพื่อประมวลผลโดยนำข้อมูลที่ Rate gyros และ Accelerometers วัดได้มาใช้รวมกันในทางที่ Optimal ที่สุด เปรียบเทียบกับวิธี Stand-alone rate gyros ซึ่งใช้ข้อมูลที่ Rate gyros วัดได้เพียงอย่างเดียวมาคำนวณหา มุมเอียง จะสังเกตได้ว่าการใช้ Kalman Filter สามารถช่วยให้ค่าความคลาดเคลื่อนไม่เพิ่มมากขึ้นจริงเมื่อเปรียบเทียบกับ Stand-alone rate gyros

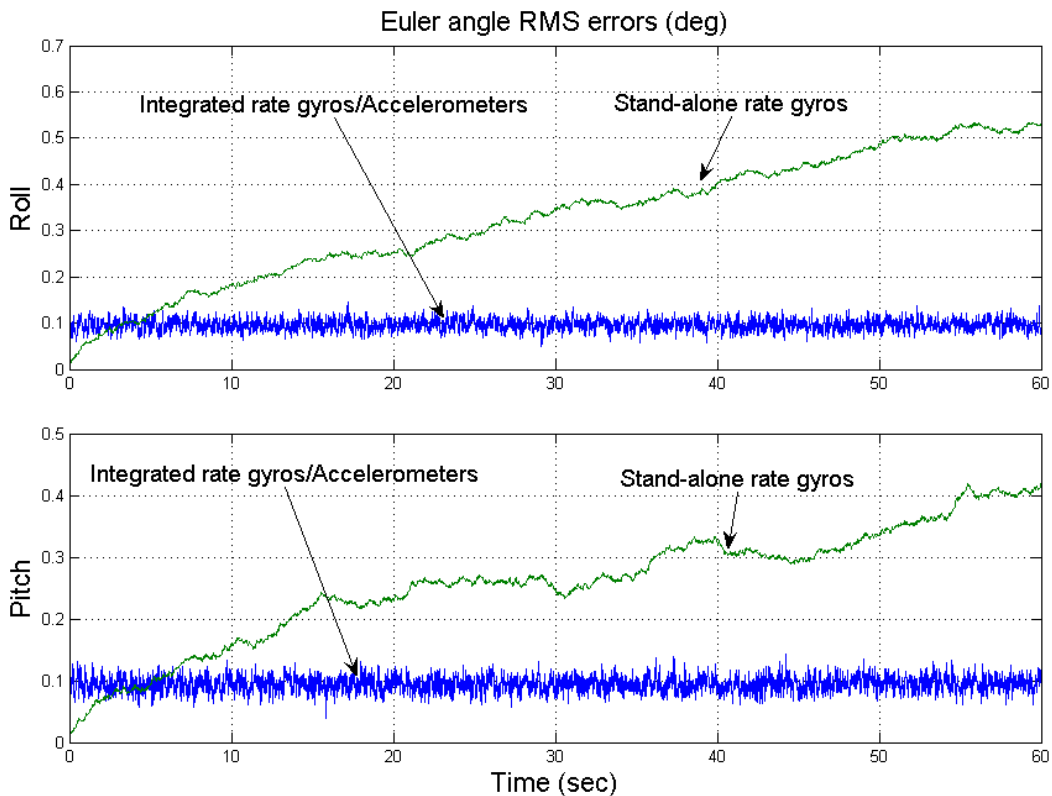


Figure 6 Performance Comparison of Attitude Determination Algorithms using Stand-alone Rate gyros against Integrated Rate gyros/Accelerometers (Monte Carlo Simulation 30 runs)

๗. สรุป

บทความนี้ได้นำเสนอทฤษฎีเกี่ยวกับวิธีการแสดงมุมเอียงของวัตถุเทียบกับแกนอ้างอิงและวิธีการเปลี่ยนแกนอ้างอิงที่เป็นที่ยอมรับใช้งานอย่างกว้างขวางคือ Direction Cosine Matrix, Euler Angles และ Quaternion พร้อมทั้งได้แสดงให้เห็นว่าแต่ละวิธีมีข้อดีข้อเสียอย่างไร อย่างไรก็ตามผู้อ่านควรสังเกตว่าไม่มีวิธีใดวิธีหนึ่งที่ดีที่สุด เนื่องจากในการประยุกต์ใช้งานจริงยังมีองค์ประกอบอื่น ๆ ที่ต้องนำมาร่วมพิจารณา (real-time/offline analysis, processing power, required accuracy เป็นต้น) ทำให้วิธีหนึ่งอาจเหมาะกว่าวิธีอื่นแล้วแต่กรณี สิ่งสำคัญคือผู้อ่านเข้าใจทฤษฎีพื้นฐานอย่างถ่องแท้เพื่อที่จะสามารถตัดสินใจเลือกใช้งานได้อย่างถูกต้องเหมาะสม

เอกสารอ้างอิง

Siouris, George M. **Aerospace avionics systems**. Academic Press, 1993.

Titterton, D.H. and Weston, J.L. **Strapdown inertial navigation technology**. Peter Peregrinus, 1997.