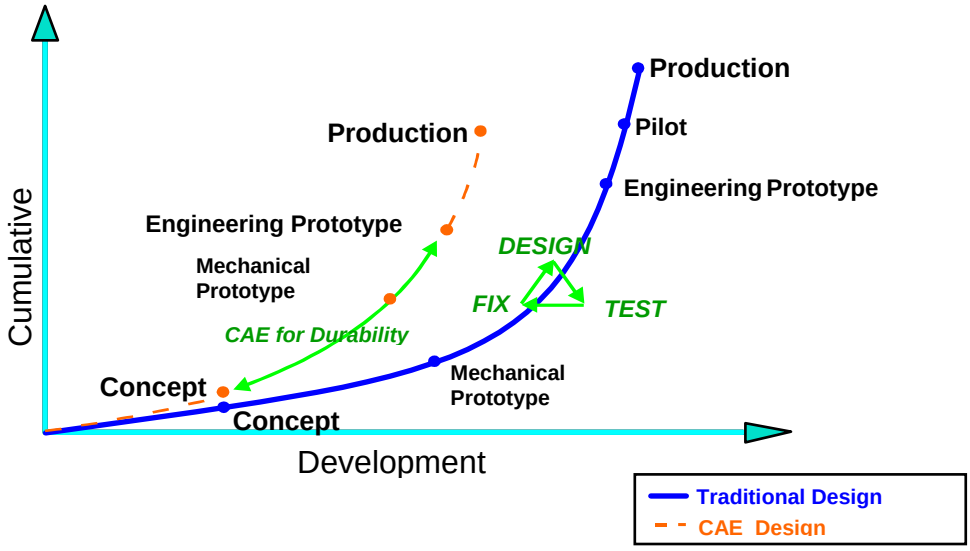
ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ตอนที่ ๑

น.อ.ผศ. ภาณุฤทธิ์ ยุกตะทัต

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ฝ่ายศึกษา โรงเรียนนายเรือ

การศึกษาวิชาต่างๆ ทางด้านวิศวกรรม ล้วนตั้งอยู่บนพื้นฐานความรู้ด้านคณิตศาสตร์ งานออกแบบต่าง ๆ แม้ว่าจะมีซอฟต์แวร์ช่วยในการออกแบบ แต่ซอฟต์แวร์ต่าง ๆ เหล่านั้นล้วนมาจากต้นตอทางคณิตศาสตร์ทั้งสิ้น ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์อย่างลึกซึ้ง จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งต่อการออกแบบทางวิศวกรรม เทคโนโลยี CAE (Computer Aid Engineering) อาจจัดได้ว่าเป็นคลื่นลูกใหม่ซึ่งมีผลกระทบโดยตรงต่อเทคโนโลยีการผลิตและการออกแบบสำหรับภาคอุตสาหกรรมในปัจจุบัน ซึ่งนับว่าเป็นคลื่นลูกที่สามต่อจากคลื่นของเทคโนโลยี CAD (Computer Aided Design) และ CAM (Computer Aided Manufacturing) ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) เป็นระเบียบวิธีการคำนวณชนิดหนึ่งในเทคโนโลยี CAE ซึ่งถูกนำมาใช้ในการวิเคราะห์เพื่อแก้ปัญหาในด้านการออกแบบทางวิศวกรรม เช่น การคำนวณเพื่อวิเคราะห์ค่าความเค้นและการเสียรูปร่างในโครงสร้างของอาคาร การวิเคราะห์เพื่อหาลักษณะการเสียรูปร่างการยุบตัวของตัวถังรถยนต์ เป็นต้น เพื่อช่วยประหยัดงบประมาณและเวลาในการพัฒนาต้นแบบทางวิศวกรรม



การใช้ CAE ช่วยในการพัฒนาต้นแบบ ช่วยลดต้นทุนและเวลาในการผลิตต้นแบบ

การนำเทคโนโลยีคลื่นลูกใหม่ CAE มาใช้งานนี้ต้องการความรู้ในหลายๆ ด้านก่อนจะนำมาประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์ได้ ดังนั้นวิศวกรผู้ออกแบบจำเป็นต้องมีพื้นฐานความรู้ ๕ ประการ คือ

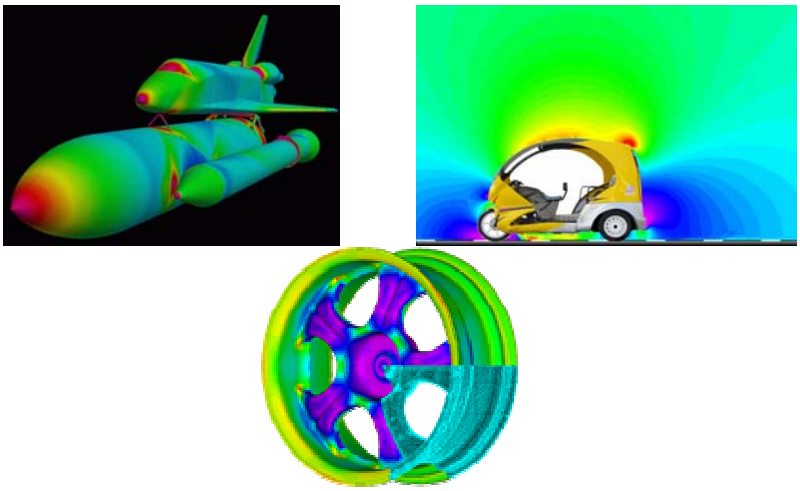
(๑) ความเข้าใจในคณิตศาสตร์ทางวิศวกรรมชั้นสูง (Advanced engineering mathematics) ที่ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial differential equations) ซึ่งเป็นสมการที่อยู่ในรูปแบบของสัญลักษณ์คล้ายเลขหกกลับหัวกลับหางที่เคยศึกษากันในระดับชั้นปีที่สามหรือปีที่สี่ในระดับมหาวิทยาลัย

(๒) ความเข้าใจในระเบียบวิธีการคำนวณขั้นสูง เช่น ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite difference method) หรือ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method)

(๓) ความเข้าใจในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical methods) ที่ปัจจุบันกลายเป็นวิชาบังคับในการเรียนวิศวกรรมศาสตร์ระดับปริญญาตรีในหลายสาขา ความรู้ความเข้าใจที่เกิดขึ้นในระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนี้เองจำเป็นต้องนำไปผนวกกับระเบียบวิธีการคำนวณขั้นสูงในข้อที่แล้วอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้

(๔) ความเข้าใจในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประกอบด้วยขั้นตอนของการคำนวณ เนื่องจากงานขนาดใหญ่อาจต้องใช้เวลาในการคำนวณนานหลายวัน หากมีความเข้าใจในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ผู้วิเคราะห์จะสามารถเข้าใจได้ว่าในช่วงเวลานานนั้นโปรแกรมคอมพิวเตอร์กำลังทำอะไรอยู่ อันเป็นผลต่อเนื่องทำให้เกิดความมั่นใจในผลลัพธ์ที่คำนวณได้

(๕) ประสบการณ์การใช้เครื่องคอมพิวเตอร์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ทั้งนี้เนื่องจากผลลัพธ์ที่คำนวณได้นั้นประกอบด้วยตัวเลขเป็นจำนวนมาก แม้ว่าในการวิเคราะห์ด้วยซอฟต์แวร์จะช่วยให้สามารถเห็นผลลัพธ์เป็นแถบสีอย่างชัดเจน

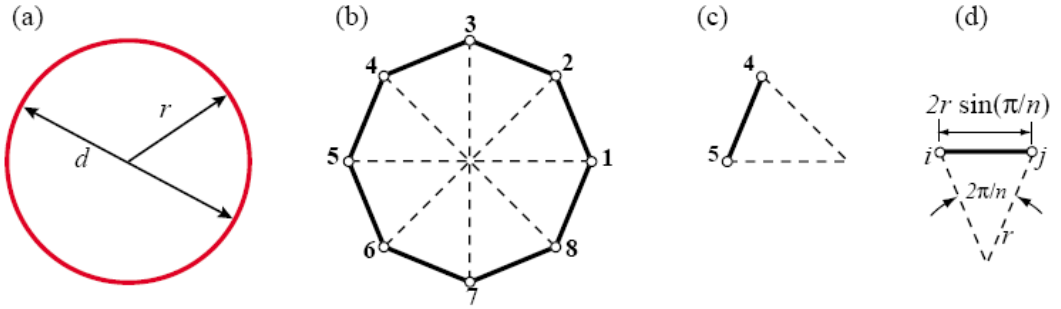


ตัวอย่างผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ไฟไนต์เอลิเมนต์ คืออะไร

ลองพิจารณาปัญหาการหาความยาวเส้นรอบวงของรูปวงกลม (L) ที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว d หน่วย เนื่องจาก $L = 2\pi r = \pi d$ จึงจำเป็นต้องหาค่า π เพื่อใช้ในการคำนวณหาเส้นรอบวงของรูปวงกลม

สำหรับขั้นตอนการดำเนินงานมีดังต่อไปนี้ วาดวงกลมที่มีรัศมี r และมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว d = 2r ดังแสดงตามรูป (a) วาดรูปหลายเหลี่ยมภายในวงกลมโดยให้มีจำนวนด้าน = n สมมติให้ n = 8 ดังแสดงตามรูป (b) กำหนดให้จุดที่มุมของรูปหลายเหลี่ยมเป็นจุดยอดและให้ชื่อแต่ละจุดด้วยตัวเลข @, ๒, ... , ๘ ลากเส้นตรงผ่านจุดศูนย์กลางวงกลมจะได้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมย่อยแต่ละรูปที่มีขนาดเท่ากัน แยกชิ้นส่วนย่อยชิ้นหนึ่งมาพิจารณา ในที่นี้สมมติว่าเลือกสามเหลี่ยมย่อยระหว่างโหนด ๔ และ ๕ ดังแสดงตามรูป (c) และใช้ชื่อโดยทั่วไปเรียกว่า ชิ้นส่วนย่อย i – j ดังแสดงตามรูป (d) ดังนั้นความยาวส่วนของเส้นรอบวง $L_{ij} = 2r \sin(\pi/n)$ และเนื่องจากแต่ละเอลิเมนต์มีขนาดเท่ากัน ดังนั้น $L_n = nL_{ij}$ นั่นคือ ค่าโดยประมาณของ π คือ $\pi_n = L_n/d = n \sin(\pi/n)$



ตัวอย่างการใช้ FEM ในการหาค่าโดยประมาณของ π

จากสูตรข้างต้นจะสามารถหาค่า π โดยประมาณ ได้ด้วยการแทนค่า n ต่างๆ (ต้องการแบ่งวงกลมเป็นรูปหลายเหลี่ยมที่มีกี่ด้าน) คอลัมน์ที่ ๒ ในตารางข้างล่างแสดงให้เห็นค่าโดยประมาณของ π เมื่อ n มีค่าต่างๆ จะเห็นได้ว่าจะต้องใช้เวลาในการคำนวณซ้ำ (Iteration) ค่อนข้างนาน (วนลูปหลายรอบ) อย่างไรก็ตามกระบวนการต่างๆ เหล่านี้ เวนน์ (Wynn) ได้เขียนอัลกอริทึมในการหาค่า π ไว้ เรียกว่า Wynn's ϵ algorithm[๑] ซึ่งแสดงให้เห็นในคอลัมน์ที่ ๓ ส่วนคอลัมน์สุดท้ายเป็นค่า π ที่เที่ยงตรงในระดับทศนิยม ๑๕ ตำแหน่ง

[๑] อัลกอริทึมการเพิ่มความเร็วในการหาค่าต่างๆ ที่ต้องวนซ้ำ (Iteration) ซึ่งใช้กันอย่างแพร่หลาย

ตารางแสดงการหาค่า π ด้วยวิธีต่าง ๆ

n	$\pi_n = n \sin(\pi/n)$	Extrapolated by Wynn – $\in$	Exact π to ๑๖ places
๑	๐.๐๐๐๐๐๐๐๐๐๐๐๐๐๐๐		
๒	๒.๐๐๐๐๐๐๐๐๐๐๐๐๐๐๐		
๔	๒.๘๒๘๔๒๗๑๒๔๗๔๖๑๙๐	๓.๔๑๔๒๑๓๕๖๒๓๗๓๐๙๖	
๘	๓.๐๖๑๔๖๗๔๕๘๙๒๐๗๑๘		
๑๖	๓.๑๒๑๔๔๕๑๕๒๒๕๘๐๕๒	๓.๑๔๑๔๑๘๓๒๗๙๓๓๒๑๑	
๓๒	๓.๑๓๖๕๔๘๔๙๐๕๔๕๙๓๙		
๖๔	๓.๑๔๐๓๓๑๑๕๖๙๕๔๗๕๓	๓.๑๔๑๕๙๒๖๕๘๙๑๘๐๕๓	
๑๒๘	๓.๑๔๑๒๗๗๒๕๐๙๓๒๗๗๓		
๒๕๖	๓.๑๔๑๕๑๓๘๐๑๑๔๔๓๐๑	๓.๑๔๑๕๙๒๖๕๓๕๘๙๗๘๖	๓.๑๔๑๕๙๒๖๕๓๕๘๙๗๙๓

แนวความคิดที่อยู่เบื้องหลังกระบวนการต่าง ๆ ในตัวอย่างข้างต้น เรียกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ถ้าเราเรียกจุดยอดของสามเหลี่ยมแต่ละจุดว่า โหนด (Node) และชิ้นส่วนสามเหลี่ยมย่อย ๆ เรียกว่า เอลิเมนต์ (Element) จะเห็นได้ว่าการแทนค่าวงกลมด้วยสามเหลี่ยมย่อย หลาย ๆ รูป ยิ่งมีจำนวนด้านมากเท่าไร ความเที่ยงตรงก็จะมากขึ้นเท่านั้น และเนื่องจากสามเหลี่ยมย่อยแต่ละรูปเป็นอิสระต่อกัน ดังนั้นเราจะสามารถคำนวณค่าความยาวของด้าน L_{ij} ได้โดยอิสระจากกัน และเมื่อนำผลลัพธ์ของความยาวด้านของสามเหลี่ยมแต่ละรูปมารวมกันก็จะได้ความยาวเส้นรอบวงของวงกลม เทคนิคการคำนวณทำนองเดียวกันนี้จึงถูกนำมาใช้ในการคำนวณหาความยาวของเส้นโค้ง [๒]

ตัวอย่างนี้ไม่ได้แสดงให้เห็นแนวคิดในเรื่องของ Degree of freedom, การ Conjugate และระบบโคออดิเนต บางคนจึงอาจจะกล่าวว่ากระบวนการข้างต้นไม่ถูกต้องตามเหตุผลในเรื่องของวงกลม เพราะวงกลมเป็นวัตถุอย่างง่ายอยู่แล้ว ไม่จำเป็นต้องวาดเป็นรูปหลายเหลี่ยมที่มี ๑๒๘ ด้าน แล้วหาค่า π จากสูตร $\pi = \lim_{n\to\infty} n \sin(\pi/n)$ [๓] โดยใช้ตัวไม่ทราบค่า π ทางด้านขวาของสูตร แต่ก็แสดงให้เห็นว่าเราสามารถสร้างรูปเหลี่ยมแทนรูปวงกลมเพื่อการคำนวณทางคณิตศาสตร์ได้ และนี่ก็คือแนวคิดที่สำคัญในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

---

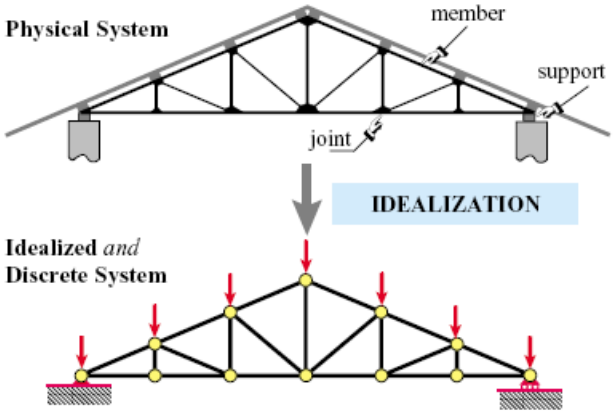
[๒] เช่นเดียวกับการหาค่าลิมิต (Limit) ในรูปร่าง ๒ มิติ และ ๓ มิติ

[๓] การคำนวณนี้สามารถข้ามขั้นตอนได้ถ้าค่าของ n เป็นเลขยกกำลัง ๒ ดังแสดงตามตาราง การใช้หลักการของ Half-angle recursion $\sqrt{2}\sin\alpha = \sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}}$ โดยเริ่มจาก $2\alpha = \pi$ ซึ่ง $\sin\pi = -1$

ขั้นตอนการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

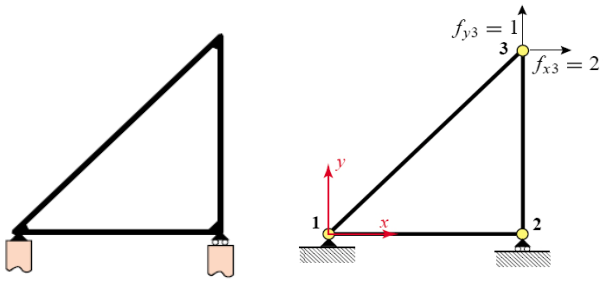
การวิเคราะห์เพื่อปรับปรุงการออกแบบ ปัญหาต่างๆ ข้างต้นนี้ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ไม่ว่าจะทำโดยการคำนวณด้วยมือ หรือใช้ซอฟต์แวร์สำเร็จรูป ก็ตามจะประกอบด้วยขั้นตอนหลัก ๆ ดังนี้

๑. การแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ยกตัวอย่างเช่น หากต้องการวิเคราะห์การสูญเสียรูปของแผ่นเหล็กอันเนื่องมาจากแรงดึง ขั้นตอนแรกจะต้องแบ่งแผ่นเหล็กออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ (Discretization หรือ เรียกว่า Idealization) หรือหากต้องการวิเคราะห์การไหลของน้ำในท่อ จำเป็นต้องแบ่งโดเมนซึ่งเป็นน้ำออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ก่อน กระบวนการนี้โดยปกติจะใช้เวลามากในทางปฏิบัติ เพราะจำเป็นต้องสร้างรูปร่างของปัญหาอย่างถูกต้องขึ้นมาก่อน ซึ่งรูปร่าง (Geometry) ของปัญหาอาจจะประกอบด้วยรูปร่างที่มีความซับซ้อน มีส่วนโค้งส่วนเว้า การประดิษฐ์กราฟิกซอฟต์แวร์ในส่วนนี้ขึ้นมาด้วยตัวเองจึงจำเป็นต้องอาศัยความรู้และประสบการณ์ทางด้านนี้เป็นอย่างมาก

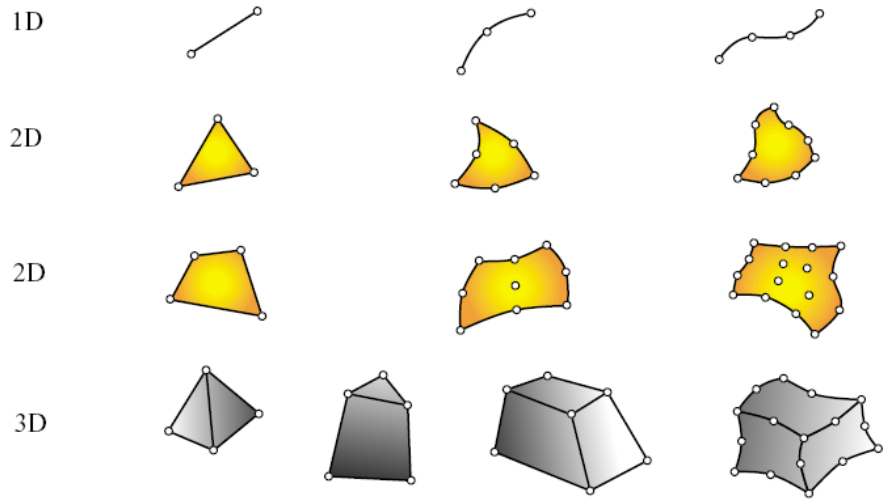


การแบ่งโดเมนของปัญหาด้วยวิธี Idealization

๒. การเลือกใช้ชนิดของเอลิเมนต์ เอลิเมนต์ย่อยที่แบ่งบนแผ่นเหล็กนั้นอาจจะเป็นเอลิเมนต์ที่มีรูปร่างเป็นสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าก็ได้ หากแบ่งออกเป็นสามเหลี่ยม ตัวไม่รู้ค่า (Unknown) จะอยู่ที่มุมทั้งสามของสามเหลี่ยมนั้นเรียกว่า โหนด (Node) การเลือกใช้ชนิดของเอลิเมนต์จะสอดคล้องกับลักษณะการกระจายของตัวไม่รู้ค่าที่สมมติขึ้นบนเอลิเมนต์นั้น ๆ เช่น หากเลือกใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามโหนดที่มุมทั้งสามแล้ว ลักษณะการกระจายตัวของตัวไม่รู้ค่าบนเอลิเมนต์นั้นจะถูกสมมติให้อยู่ในรูปแบบของแผ่นเรียบ (Flat Plane) แต่หากเลือกใช้เอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมสี่โหนดที่มุมทั้งสี่ ลักษณะการกระจายตัวของตัวไม่รู้ค่าบนเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมนี้อาจจะไม่เรียบ สามารถโค้งไปมาได้ ดังนั้นการเลือกใช้เอลิเมนต์ชนิดต่าง ๆ จึงมีผลโดยตรงกับผลลัพธ์ที่คำนวณได้



การกำหนดโหนดบนเอลิเมนต์



เอลิเมนต์แบบต่าง ๆ

๓. การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ สมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาที่สนใจอยู่นั้น จะถูกเปลี่ยนไปเป็นสมการทางพีชคณิตที่เรียกว่า สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ สมการเหล่านี้จะถูกสร้างขึ้นสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ เนื่องจาก เอลิเมนต์ต่างๆ มีขนาดไม่เท่ากัน กระบวนการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์นี้เองนับว่าเป็นหัวใจสำคัญในการเรียนวิชาไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งเป็นเรื่องที่ยุ่งยากซับซ้อน ในที่นี้จะยกตัวอย่างเฉพาะผลลัพธ์ที่ได้จากการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์ในเรื่องของกลศาสตร์ของแข็ง ในการวิเคราะห์ค่าการเสียรูป

จากสมการสมดุลของแรงในแนวแกน ๓ แกน

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0$$

เมื่อแปลงเป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งเป็นสมการทางพีชคณิต จะได้

$$[K]\{\delta\} = \{F\}$$

$$\{\sigma\} = [C][B][\delta] - [C][\varepsilon_0]$$

โดยที่ [K] แทนเมตริกซ์ของค่าความแข็งเกร็ง

$\{\delta\}$ แทนเวคเตอร์แสดงค่าการเสียรูป ซึ่งประกอบด้วยค่าการเสียรูป u และ v ที่โหนด

$\{F\}$ แทนเวคเตอร์แสดงค่าโหลดลัพธ์

[C] แทนเมตริกซ์ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด

[B] แทนเมตริกซ์ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและค่าการเสียรูป

$\{\sigma\}$ แทนเวคเตอร์แสดงค่าความเค้น

๔. การรวมสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เข้าด้วยกันแล้วแก้ระบบสมการใหญ่ สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการทางพีชคณิต จะต้องถูกนำมารวมกันอย่างถูกต้องและมีหลักการเปรียบเสมือนการนำชิ้นส่วนตัวต่อ (Jigsaw puzzle) มาต่อเข้าด้วยกันอย่างถูกต้องและเหมาะสม จึงจะเกิดเป็นรูปภาพที่สมบูรณ์ การประกอบสมการ ไฟไนต์เอลิเมนต์เข้าด้วยกันก่อให้เกิดระบบสมการขนาดใหญ่ จากนั้นจึงประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition) ของปัญหานั้น ๆ เพื่อแก้สมการ หาผลลัพธ์ที่จุดต่อ ซึ่งหากแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อน ผลลัพธ์เหล่านั้นอาจจะแทนค่าอุณหภูมิ หรือหากวิเคราะห์โครงสร้าง ผลลัพธ์เหล่านั้นอาจจะแทนค่าการเคลื่อนตัวของโครงสร้าง

๕. การคำนวณหาค่าอื่น ๆ ที่เหลือ เพื่อทำให้ปัญหานั้นได้รับการวิเคราะห์อย่างสมบูรณ์ เมื่อได้ผลลัพธ์แล้วจะต้องนำผลลัพธ์นั้นไปหาค่าอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง เช่น เมื่อทราบอุณหภูมิตามตำแหน่งต่าง ๆ แล้วก็สามารถคำนวณหาปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ไหลผ่านได้ หรือเมื่อทราบค่าการเคลื่อนตัวของโครงสร้างแล้วจะสามารถคำนวณหาค่าความเค้นที่โครงสร้างแต่ละจุดได้เช่นกัน

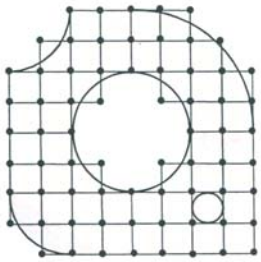
กระบวนการแก้ปัญหาด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์

ซอฟต์แวร์ช่วยในการวิเคราะห์ทางไฟไนต์เอลิเมนต์มีอยู่เป็นจำนวนมากในท้องตลาด เช่น ANSYS, Cosmos, NasTran ซึ่งส่วนใหญ่มักจะมีราคาสูง ขึ้นอยู่กับขีดความสามารถของซอฟต์แวร์ แต่โดยทั่วไปกระบวนการแก้ปัญหาด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์ จะประกอบด้วยขั้นตอนใหญ่ ๆ ๓ ขั้นตอน ดังนี้

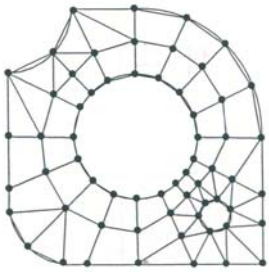
๑. กระบวนการขั้นต้น (Pre-processor)

กระบวนการขั้นต้น คือ การสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากรูปร่างลักษณะที่แท้จริงของปัญหา จากนั้นจึงประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตก่อนวิเคราะห์ปัญหานั้น

Plate Geometry



Finite Difference Model



Finite Element Model

Plate with Complex shape

จากรูปจะเห็นได้ว่า ในการวิเคราะห์ค่าการเสียรูปของแผ่นโลหะ ซึ่งมีรูปร่างซับซ้อน เช่น มีการเจาะรู หรือมีรอยบาก มีส่วนโค้งส่วนเว้า การเลือกใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Model) จะได้ผลลัพธ์ซึ่งมีความเที่ยงตรงสูงกว่าการใช้ระเบียบวิธีหาผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Model) ซึ่งเป็นวิธีการอย่างหนึ่งในการหาผลลัพธ์โดยประมาณที่เคยได้รับความนิยมในอดีต (ให้สังเกตจากการตีตารางกริดในระเบียบวิธีหาผลต่างสืบเนื่อง จะมีความผิดพลาดไปจากรูปทรงเดิมมากกว่าการตีเมสในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์)

การสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์อันประกอบด้วยเอลิเมนต์เป็นจำนวนมากบนรูปร่างลักษณะของปัญหานั้น ตามปกติจะใช้เวลานาน โดยเฉพาะอย่างยิ่งหากรูปร่างมีความซับซ้อน ผู้สร้างรูปร่างบนหน้าจอควรมีประสบการณ์ในการใช้ซอฟต์แวร์นั้นๆ มาสักระยะหนึ่ง จึงจะสามารถสร้างรูปแบบได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ เริ่มตั้งแต่การสร้างจุด เส้นตรง เส้นโค้ง รวมทั้งพื้นผิว โดยข้อมูลของจุด เส้นตรง เส้นโค้ง และพื้นผิวเหล่านี้จะถูกเก็บในรูปแบบของสมการทางเรขาคณิตในหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ เพื่อให้ผู้ใช้สามารถกำหนดขนาดและจำนวนการสร้างเอลิเมนต์ที่แตกต่างกันได้ โดยรูปแบบของไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกิดขึ้นยังเสมือนรูปร่างของจริงมากที่สุด รูปแบบของไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ยังประกอบด้วยหมายเลขของจุดต่อ หมายเลขของเอลิเมนต์ และข้อมูลอื่น ๆ ที่จำเป็นต้องใช้ในการวิเคราะห์ขั้นต่อไป รายละเอียดจำนวนมากเหล่านี้โดยทั่วไปมักจะไม่แสดงบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ ยกเว้นผู้ใช้ต้องการให้แสดงเพื่อการตรวจสอบความถูกต้อง หลังจากการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ได้เสร็จสิ้นลงแล้ว ผู้ใช้จำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขขอบเขต อันประกอบไปด้วย การกำหนดค่าให้กับบางจุดของ

รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น เงื่อนไขขอบเขตเหล่านี้ จำเป็นต้องเหมือนหรือใกล้เคียงกับของจริงให้มากที่สุด จึงจะนำไปสู่ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับความเป็นจริง

๒. กระบวนการวิเคราะห์ (Analysis)

ข้อมูลต่างๆ ของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สร้างขึ้น และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดในขั้นตอนแรกจะถูกส่งเข้าสู่กระบวนการวิเคราะห์ ด้วยโปรแกรมซึ่งฝังตัวอยู่ในซอฟต์แวร์ชุดนี้ โดยไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมจะสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับปัญหานั้น สำหรับเอลิเมนต์ย่อยทุก ๆ เอลิเมนต์ก่อนที่จะนำมาประกอบเข้าเป็นระบบสมการใหญ่ แล้วจึงประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตที่กำหนด จากนั้นจึงแก้สมการรวมขนาดใหญ่นั้น โดยเวลาที่ใช้ในการคำนวณจะขึ้นอยู่กับจำนวน เอลิเมนต์ทั้งหมดซึ่งผู้ใช้สร้างขึ้น และขนาดของระบบสมการรวมขนาดใหญ่ที่เกิดขึ้น หากสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาเป็นสมการเชิงเส้น (Linear Partial Differential Equation) ระบบสมการรวมนี้จะถูกแก้เพียงครั้งเดียว ทำให้เวลาที่ใช้ในการคำนวณไม่มากนัก แต่หากสมการเชิงอนุพันธ์นั้นไม่เป็นสมการเชิงเส้น (Nonlinear) ระบบสมการจะถูกแก้วนซ้ำหลายรอบ ทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณมากขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งหากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยเอลิเมนต์เป็นจำนวนมาก ดังนั้นหากผู้ใช้ซอฟต์แวร์สำเร็จรูป มีความเข้าใจในองค์ความรู้พื้นฐานในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อยู่บ้าง จะช่วยในการตัดสินใจสิ่งต่าง ๆ ก่อนที่จะทำการวิเคราะห์ได้เป็นอย่างดี ซึ่งจะทำให้การวิเคราะห์เป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ

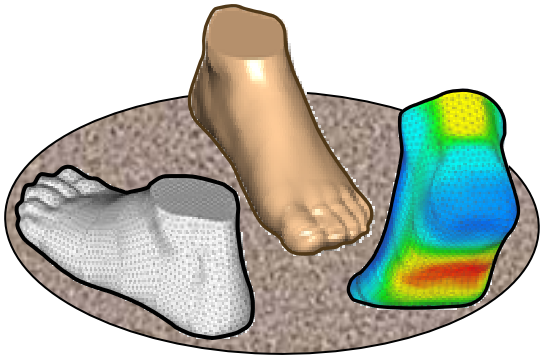
๓. กระบวนการขั้นท้าย (Post-processor)

ผลลัพธ์ที่เกิดจากการวิเคราะห์ในขั้นตอนที่ ๒ จะประกอบด้วยตัวเลขเป็นจำนวนมาก ในกระบวนการขั้นท้ายจึงจำเป็นต้องอาศัยคอมพิวเตอร์กราฟิก เพื่อแสดงผลลัพธ์เหล่านี้ออกมาในรูปของสีปรากฏบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ จึงทำให้ผู้ใช้สามารถเข้าใจปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นได้อย่างรวดเร็ว กระบวนการขั้นท้ายจึงมีความจำเป็นเป็นอย่างยิ่ง สำหรับรูปแบบของการแสดงผลลัพธ์นั้นมีอยู่หลายชนิด เช่น การแสดงด้วยแถบชั้นสี (Fringe Plot) การแสดงด้วยเส้นชั้นสี (Contour Lines) การแสดงด้วยเวคเตอร์ (Vector Plot) เป็นต้น ซึ่งการแสดงผลลัพธ์จะสามารถแสดงให้เห็นได้ทั้งบนรูปทรงดั้งเดิม หรือรูปทรงที่เสียรูปไปแล้วได้ ดังนั้นความเข้าใจในผลลัพธ์อันเป็นผลจากรูปทรงที่ได้ออกแบบไว้บนหน้าจอคอมพิวเตอร์ได้โดยตรงอย่างรวดเร็ว จะทำให้ผู้ออกแบบเข้าใจในปัญหานั้นอย่างลึกซึ้งมากยิ่งขึ้น และอาจก่อให้เกิดแนวคิดในการปรับเปลี่ยนรูปทรงนั้น เพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่ดียิ่งขึ้นต่อไปอีก กระบวนการดังกล่าวนี้เองที่ช่วยลดเวลาในการออกแบบผลิตภัณฑ์ใหม่ ๆ ลงไปได้มาก และช่วยลดต้นทุนในการผลิตต้นแบบเพื่อลองผิดลองถูกที่เคยใช้กันในอดีตลงได้อย่างสิ้นเชิง

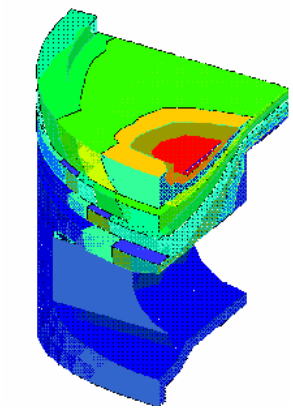
ปัจจัยในการวิเคราะห์ปัญหา

ในกระบวนการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ มีปัจจัยซึ่งเป็นองค์ประกอบหลัก ๓ ประการ ที่จะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์เปลี่ยนแปลงไป องค์ประกอบต่าง ๆ เหล่านี้ คือ

๑. สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Differential Equation)



เนื่องจากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จะถูกประดิษฐ์ขึ้นจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation) ที่สอดคล้องกับปัญหานั้น ๆ ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจึงเป็นปัจจัยสำคัญในการวิเคราะห์ปัญหา ตัวอย่างเช่น ปัญหาการวิเคราะห์ความเค้นในเท้าเทียม สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่สอดคล้องกันจะบ่งบอกถึงสถานภาพความสมดุลของแรง ณ ตำแหน่งใด ๆ บนเท้าเทียมนั้น หรือปัญหาการวิเคราะห์ระดับ



อุณหภูมิในลูกสูบรถยนต์ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่สอดคล้องกันจะบ่งบอกถึงสภาพความสมดุลของการถ่ายเทความร้อน ณ ตำแหน่งใด ๆ ในลูกสูบนั้น เป็นต้น ปัญหาต่างๆ ในด้านวิศวกรรมล้วนมีสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่สอดคล้องกันเสมอ และหากมองอย่างลึกซึ้งแล้วปัญหาต่าง ๆ ที่สนใจนั้นอาจจะไม่เกี่ยวข้องโดยตรงกับงานทางวิศวกรรมก็เป็นได้ อย่างไรก็ตามในสายงานทางด้านวิทยาศาสตร์ ฟิสิกส์ สิ่งแวดล้อม และสายงานอื่น ๆ มักจะมีสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่สอดคล้องกับปัญหานั้นเสมอ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้เองที่เป็นหัวใจอันแท้จริง และเป็นจุดเริ่มต้นของการประดิษฐ์ซอฟต์แวร์ไฟไนต์เอลิเมนต์ชนิดต่าง ๆ

จำนวนสมการในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนี้จะขึ้นอยู่กับตัวไม่รู้ค่า (Unknown) ของปัญหานั้นๆ ยกตัวอย่างเช่น ตัวไม่รู้ค่าในปัญหาเท้าเทียมจะประกอบด้วยค่าการเสียรูปรวม ๓ ค่า ใน ๓ ทิศทาง (๓ มิติ) สำหรับปัญหาใน ๓ มิติ ซึ่งเกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่งบนเท้าเทียมนั้น ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจึงประกอบด้วยสมการในรูปแบบเลขหกกลับหัวกลับหางรวม ๓ สมการ ซึ่งบ่งบอกถึงสภาวะความสมดุลของแรงใน ๓ ทิศทาง ณ ตำแหน่งใดๆ บนเท้าเทียมนั้น

๒. เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition)

นอกเหนือจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่สอดคล้องกับปัญหานั้น ๆ แล้ว ผลลัพธ์ที่คำนวณได้ยังขึ้นอยู่กับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหานั้นด้วย เช่น เท้าเทียมเดียวกันนี้จะเกิดความเค้นในระดับที่แตกต่างกันหากใช้กับผู้พิการที่มีน้ำหนักตัวไม่เท่ากัน หรืออุณหภูมิในลูกสูบรถยนต์จะมีค่าในระดับที่แตกต่างกันหากใช้น้ำมันเชื้อเพลิงต่างชนิดกัน การระเบิดของไอน้ำมันในห้องเสื้อสูบก็จะให้ปริมาณความร้อนที่แตกต่างกัน เป็นต้น ดังนั้น ในการวิเคราะห์จึงจำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขขอบเขตให้ครอบคลุมการใช้งานที่อาจเป็นไปได้ หรือกำหนดเป็นขีดจำกัดในการใช้งานสำหรับการออกแบบ เช่น กำหนดน้ำหนักตัวสูงสุดของผู้ใช้เท้าเทียมเพื่อไม่ให้เกิดความเสียหาย หรือการกำหนดให้ใช้เชื้อเพลิงชนิดใดกับเครื่องยนต์ชนิดนั้น ๆ

๓. รูปร่างของปัญหา (Geometry)

ผลลัพธ์ที่คำนวณได้จะมีความแตกต่างกันหากรูปร่างลักษณะของปัญหามีการเปลี่ยนแปลงไป เช่น ระดับความเค้นในเท้าเทียมจะมีค่าแตกต่างออกไปหากเท้าเทียมนั้นมีขนาดใหญ่ขึ้นหรือเล็กลงในขณะที่น้ำหนักตัวของผู้ใช้ยังคงที่ หรืออุณหภูมิภายในลูกสูบรถยนต์จะมีค่าเปลี่ยนแปลงไปหากขนาดของลูกสูบนั้นใหญ่ขึ้น หรือมีรูปร่างแตกต่างไปจากเดิม แม้ว่าปริมาณความร้อนจากการจุดระเบิดในห้องเสื้อสูบยังคงเดิม ในปัจจุบันซอฟต์แวร์ไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีประสิทธิภาพสามารถที่จะช่วยแนะนำการปรับปรุงรูปร่างของปัญหาไม่ว่าจะเป็นการปรับเปลี่ยนขนาดหรือเปลี่ยนแปลงรูปร่าง เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ในการคำนวณที่ดีที่สุดได้

บทสรุป

การวิเคราะห์ปัญหาด้วยการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์เริ่มได้รับความนิยมมากขึ้นในปัจจุบัน ทำให้ผู้วิเคราะห์ทราบถึงปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในผลิตภัณฑ์ที่ได้ออกแบบไว้แล้วโดยละเอียด และยังก่อให้เกิดแนวคิดในการปรับปรุงแก้ไขรูปร่างลักษณะของของต้นแบบ อันจะนำไปสู่รูปแบบใหม่ที่มีประสิทธิภาพสูงขึ้นไปอีก สามารถหลีกเลี่ยงการลองผิดลองถูกด้วยการจำลองสถานการณ์ต่างๆ ด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ จึงช่วยประหยัดเวลาและลดค่าใช้จ่ายในการผลิตต้นแบบลงไปได้มาก อย่างไรก็ตามการที่จะได้มาซึ่งผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องและเที่ยงตรงนั้น ผู้วิเคราะห์จำเป็นต้องมีองค์ความรู้ในหลาย ๆ ด้าน นับตั้งแต่คณิตศาสตร์ชั้นสูง ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ความเข้าใจในส่วนของโปรแกรมคอมพิวเตอร์และประสบการณ์ในการใช้กราฟิกซอฟต์แวร์บนเครื่องคอมพิวเตอร์ ซึ่งองค์ความรู้เหล่านี้ผู้ใช้ส่วนใหญ่มักจะได้สัมผัสกันมาแล้วในระหว่างการศึกษา หากสามารถมององค์ความรู้เหล่านี้ด้วยความเข้าใจทางกายภาพ และนำมาผสมผสานกันได้อย่างเหมาะสมแล้ว ผู้ใช้จะเห็นคุณประโยชน์ของศาสตร์แต่ละแขนงที่ได้เรียนรู้มาแล้ว และที่สำคัญที่สุด การรวมกันที่เหมาะสมของศาสตร์ต่าง ๆ เหล่านี้ จะก่อให้เกิดผลลัพธ์อันเป็นประโยชน์ต่อการวิเคราะห์การออกแบบได้โดยตรง

ในตอนต่อ ๆ ไปผู้เขียนจะแนะนำให้เห็นรายละเอียดในการวิเคราะห์ปัญหาแต่ละด้านเพื่อการออกแบบ ไม่ว่าจะเป็นการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อน (Heat Transfer) การวิเคราะห์ของแข็ง (Stress Analysis) การวิเคราะห์ของแข็งอันเนื่องมาจากอุณหภูมิ (Thermal Stress) และการวิเคราะห์ของไหล (Fluid Dynamic) โดยจะชี้ให้เห็นตั้งแต่สมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาแต่ละแบบ จนถึงการแปลงให้เป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ และวิเคราะห์ผลลัพธ์ โดยจะยกตัวอย่างปัญหาอย่างง่ายที่สามารถคำนวณได้ด้วยมือมาเป็นตัวอย่าง เพื่อให้ผู้อ่านสามารถตรวจสอบผลลัพธ์ได้ว่ามีความถูกต้อง

เอกสารอ้างอิง

ปราโมทย์ เดชะอำไพ. **ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม**. กรุงเทพ ฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, ๒๕๔๗.

ปราโมทย์ เดชะอำไพ. **ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม.** กรุงเทพ ฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, ๒๕๔๖.

ศูนย์บริการปรึกษาการออกแบบและวิศวกรรม (DECC). ***ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ขั้นพื้นฐาน.*** ๒๕๕๐

University of Corolado. Dept. of Aerospace Eng. ***Introduction to FEM.*** ๒๐๐๕.