

# สนุกคิด กับ คณิตศาสตร์ (๒)

น.อ.หญิง ศ.ชุตินา เนียมโก๊ะ  
ศาสตราจารย์ ฝายศึกษา โรงเรียนนายเรือ

ปัญหานับนิ้วดูเหมือนว่าจะเป็นปัญหาเด็ก ๆ แต่การเรียนคำนวณสูง ๆ ต้องอาศัยพื้นฐานที่ดี มีเทคนิคต่าง ๆ ช่วยในการเรียนให้ง่ายขึ้น (ความสนุกและไม่น่าเบื่อจะตามมา) เมื่อสมัยผู้เขียนเป็นนักเรียนชั้นประถม การเรียนคณิตศาสตร์จะมีชั่วโมงเลขในใจสัปดาห์ละ ๑ ชั่วโมง คือครูจะเข้ามาสอนโดยวิธีอ่านโจทย์เลขสั้น ๆ หน้าชั้น เมื่อนักเรียนฟังโจทย์จบให้คิดเลขในใจ โดยขีดเขียนทดเลขได้บ้างเล็กน้อย แล้วเขียนเฉพาะคำตอบลงในกระดาษคำตอบที่ละข้อในเวลาสั้น ๆ ถ้าใครมีวิธีคิดเลขเร็วก็จะได้เปรียบกว่าเพื่อน ดังนั้นเทคนิคการคิดเลขจึงเป็นสิ่งสำคัญ ปัญหาในฉบับนี้จะลองฝึกสมองการคิดเลขง่าย ๆ สั้น ๆ ภายในเวลา ๒ - ๓ วินาที ถ้าผู้อ่านท่านใดหาคำตอบได้ทันเวลาให้ลองคิดหาเทคนิคหรือกลเม็ดที่ใช้อื่น ๆ นอกจากการคูณกันโดยตรง หรือทดเครื่องคิดเลข แล้วดูว่าเทคนิคที่ได้จะตรงกับเฉลยหรือไม่ สำหรับอีกปัญหาหนึ่งเป็นการใช้วิธีทางพีชคณิตช่วยพิสูจน์คำตอบในเรื่องลูกเต๋า

ปัญหาที่ ๑ จงหาคำตอบต่อไปนี้ โดยคิดเลขในใจ

- ๑๘ X ๑๘
- ๕๔ X ๑๑
- ๖๕ X ๖๕
- ๓๗ X ๓๗

ปัญหาที่ ๒ ในกล่องมีลูกเต๋ายู่ ๒ ลูก โดยที่ลูกเต๋าแต่ละลูกหน้าที่อยู่ตรงข้ามกันต้องรวมกันได้ ๗ นั่นคือหน้า ๖ ตรงข้ามกับหน้า ๑ หน้า ๕ ตรงข้ามกับหน้า ๒ และหน้า ๔ ตรงข้ามกับหน้า ๓ ถ้าทอดลูกเต๋า ๒ ลูกนี้ แล้วดำเนินการคำนวณตามขั้นตอนดังนี้

- คูณหน้าบนของลูกเต๋าทันที ๒ ลูก
- คูณหน้าล่างของลูกเต๋าทันที ๒ ลูก
- คูณหน้าบนของลูกเต๋าลูกหนึ่งกับหน้าล่างของลูกเต๋าลูกหนึ่ง (เหมือนคูณไขว้ ได้ ๒ คำตอบ)

ถ้านำคำตอบข้อ ก ข และ ค (ทั้งหมด ๔ คำตอบ) มารวมกัน จะได้เลขจำนวนนับ ๔๙ เสมอใช่หรือไม่ เพราะเหตุใด



### เฉลยปัญหาที่ ๑ (เทคนิคการคิดเลขในใจ)

$$ก. ๑๘ \times ๑๘ = ๓๒๔ \quad (\text{จากการคูณกันโดยตรง})$$

ลองมาเรียนรู้เทคนิคหรือกลเม็ดการคูณเลข โดยเลข ๒ จำนวนต้องเริ่มจาก ๑๑ ถึง ๑๙ คือไม่เกิน  $๒๐ \times ๒๐$  โดยไม่ใช้เครื่องคิดเลข

ตัวอย่าง ก.๑  $๑๘ \times ๑๘$

- ให้เอาจำนวนที่มากกว่าระหว่าง ๑ จำนวน คือ ๑๘ ไว้ในใจ
- นำเลขตัวท้ายของจำนวนที่น้อยกว่า คือ ๘ มาบวก จะได้  $๑๘ + ๘ = ๒๖$
- เติมเลขศูนย์ (๐) ข้างหลังจำนวนนี้ (หรือคูณด้วย ๑๐) จะได้  $๒๖ \times ๑๐ = ๒๖๐$
- คูณเลขตัวท้ายของ ๒ จำนวน (ที่โจทย์กำหนด) ได้  $๘ \times ๘ = ๖๔$  ให้นำไปบวก

กับ ๒๖๐ จะได้คำตอบที่ต้องการ

$$๒๖๐ + (๖๔) = ๓๒๔$$

ให้ผู้อ่านทดลองคำนวณโดยเทคนิคนี้กับเลขจำนวนอื่น ดังนี้

ตัวอย่าง ก. ๒  $๑๔ \times ๑๗$

- เอา ๑๗ ไว้ในใจ
- นำ ๔ บวกกับ ๑๗  $\rightarrow ๔ + ๑๗ = ๒๑$
- เติมศูนย์ (๐)  $\rightarrow ๒๑๐$
- นำ  $๔ \times ๗ = ๒๘ \rightarrow ๒๑๐ + ๒๘ = ๒๓๘$  คือคำตอบ

$$ข. ๕๔ \times ๑๑ = ๕๙๔ \quad (\text{จากการคูณกันโดยตรง})$$

เราเคยเรียนรู้ว่าการคูณด้วย ๑๐ ให้เติมศูนย์ท้ายจำนวนนั้นก็ได้คำตอบ แต่สำหรับการคูณด้วย ๑๑ บางคนอาจยังไม่ทราบมีเทคนิคการคูณเลขในใจของเลข ๒ หลักคูณด้วย ๑๑ ดังนี้

ตัวอย่าง ข. ๑  $๕๔ \times ๑๑$

- นำ ๕๔ มาแยกในใจคือ (๕ \_ ๔)
- นำเลขแต่ละหลักมาบวกกัน คือ  $๕ + ๔ = ๙$
- นำ ๙ ใส่ในช่องว่างที่แยกไว้ในใจจะได้คำตอบคือ ๕๙๔

กรณีการนำเลขแต่ละหลักมาบวกกัน ถ้าผลลัพธ์เกิน ๑๐ ให้นำเฉพาะเลขท้ายใส่ในช่องว่างที่แยกไว้ ส่วนเลขตัวหน้าที่เหลือให้นำไปบวกกับเลขตัวหน้าที่แยกไว้ในใจ

ตัวอย่าง ข. ๒  $๖๘ \times ๑๑$

- นำ ๖๘ มาแยก (๖ \_ ๘)
- นำ  $๖ + ๘ = ๑๔$
- นำ ๔ ใส่ในช่องว่างแล้วนำ ๑ บวกกับ ๖ เป็น ๗ จะได้คำตอบ ๗๔๘

$$ค. ๖๕ \times ๖๕ = ๔๒๒๕ \quad (\text{จากการคูณกันโดยตรง})$$



เทคนิคการคูณเลขในใจของจำนวนซ้ำกัน ๒ จำนวน หรือยกกำลังสองของเลข ๒ หลักที่ลงท้ายด้วย ๕ มีดังนี้

ตัวอย่าง ค. ๑  $๖๕ \times ๖๕$

- ให้นำเลขท้าย ๕ กับ ๕ คูณกัน คือ  $๕ \times ๕ = ๒๕$  เก็บไว้ในใจ
- นำเลขตัวหน้าคูณกัน โดยนำ ๑ บวกเข้ากับเลขตัวหน้าตัวหนึ่งก่อนคูณกับเลขตัวหน้าอีกตัวหนึ่งคือ  $๖ \times (๖ + ๑) = ๖ \times ๗ = ๔๒$
- นำ ๔๒ มาวางเรียงข้างหน้า ๒๕ จะได้คำตอบ ๔๒๒๕

ตัวอย่าง ค. ๒  $๒๕ \times ๒๕$

- นำ  $๕ \times ๕ = ๒๕$  เก็บไว้ในใจ
- นำ  $๒ \times (๒ + ๑) = ๒ \times ๓ = ๖$
- นำ ๖ วางเรียงข้างหน้า ๒๕ ได้คำตอบ ๖๒๕
- ง.  $๓๗ \times ๓๗ = ๑๓๖๙$  (จากการคูณกันโดยตรง)

เทคนิคการคูณเลขในใจของจำนวนซ้ำกัน ๒ จำนวน หรือยกกำลังสองของเลข ๒ หลักใด ๆ มีดังนี้

ตัวอย่าง ง. ๑  $๓๗ \times ๓๗$

- พิจารณาว่าเลข ๓๗ อยู่ใกล้เลข ๓๐ หรือ ๔๐ มากกว่ากัน
- เลข ๓๗ อยู่ใกล้ ๔๐ มากกว่า โดยมีความห่าง  $a$  เท่ากับ ๓
- หาค่า  $๓๗ \pm a$  จะได้ค่า ๓๔ และ ๔๐
- นำ  $๓๔ \times ๔๐ (= ๑๓๖๐)$  เก็บไว้ในใจ

หรือแยกคูณเร็ว ๆ คือ  $\left\{ \begin{array}{l} \text{นำ } ๓๔ \times ๔ = ๑๓๖ \\ \text{เติมเลขศูนย์ (๐) ข้างหลังจำนวนนี้ (หรือคูณด้วย ๑๐) ได้} = ๑๓๖๐ \end{array} \right.$

- นำความห่าง  $a$  มายกกำลังสอง คือ  $a^2 = 3^2 = 9$
- นำ ๙ บวกกับ ๑๓๖๐ ที่เก็บไว้ในใจ จะได้คำตอบ ๑๓๖๙

ตัวอย่าง ง. ๒  $๗๔ \times ๗๔$

- ๗๔ ใกล้ ๗๐ มากกว่า ๘๐ มีความห่างเท่ากับ ๔
- หาค่า  $๗๔ \pm ๔$  จะได้ค่า ๗๐ และ ๗๘
- นำ  $๗๘ \times ๗๐ = (๗๘ \times ๗) \times ๑๐ = ๕๔๖๐$  (เก็บไว้ในใจ)
- นำ  $๔^2 = ๑๖$
- คำตอบคือ  $๕๔๖๐ + ๑๖ = ๕๔๗๖$

ตอบ

### เฉลยปัญหาที่ ๒

จากโจทย์กำหนดลูกเต๋า ๒ ลูก แต่ละลูกมีหน้าที่อยู่ตรงข้ามกันรวมกันได้ ๗ คือ หน้า ๖ ตรงข้ามกับหน้า ๑ หน้า ๕ ตรงข้ามกับหน้า ๒ และหน้า ๔ ตรงข้ามกับหน้า ๓

สมมติให้ A, B, C เป็นคู่ของหน้าที่ยรวมกันได้ ๗ มี ๓ คู่ คือ

๖ (บน)

๑ (บน)

A = หรือสลับนับหน้าบน – ล่างเป็น

๑ (ล่าง)

๖ (ล่าง)

๕ (บน)

๒ (บน)

B = หรือสลับนับหน้าบน – ล่างเป็น

๒ (ล่าง)

๕ (ล่าง)

๔ (บน)

๓ (บน)

C = หรือสลับนับหน้าบน – ล่างเป็น

๓ (ล่าง)

๔ (ล่าง)

ในการทอดลูกเต๋า ๒ ลูก พร้อมกัน จับคู่ได้ผลลัพธ์แจกแจงได้ทั้งหมด ดังนี้

A-A , A-B , A-C , B-A , B-B , B-C , C-A , C-B , C-C





		แบบที่ ๑		หรือ	แบบที่ ๒	
		ลูกที่ ๑	ลูกที่ ๒		ลูกที่ ๑	ลูกที่ ๒
ซ้ำ	A-A	 (บน) (ล่าง)			 (บน) (ล่าง)	
	A-B	๖	๒		๖	๕
		๑	๕		๑	๒
	A-C	๖	๓		๖	๔
		๑	๔		๑	๓
	B-A	๕	๑		๕	๖
		๒	๖		๒	๑
	B-B	๕	๒		๕	๕
		๒	๕		๒	๒
B-C	๕	๓		๕	๔	
	๒	๔		๒	๓	
C-A	๔	๑		๔	๖	
	๓	๖		๓	๑	
C-B	๔	๒		๔	๕	
	๓	๕		๓	๒	
C-C	๔	๓		๔	๔	
	๓	๔		๓	๓	

จากตารางผลลัพธ์ของแต่ละวิธีในแบบที่ ๑ และแบบที่ ๒ (แบบที่ ๒ ต่างกับแบบที่ ๑ ตรงที่ ลูกเต๋าลูกที่ ๒ สลับหน้าบน - ล่างกัน) เมื่อนำมาคำนวณตามโจทย์สั่ง ทั้ง ๓ ข้อจะเป็นเลขชุดเดียวกัน จึงถือเป็นวิธีเดียวกัน ให้เลือกใช้เพียงแบบเดียว เช่น



๕๖

$$\begin{array}{l}
 A-A \text{ แบบที่ ๑} \\
 \begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{c} \text{๖} \\ \text{๑} \end{array} & \begin{array}{c} \text{๑} \\ \text{๖} \end{array} \\
 & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} & \\
 \end{array}
 \end{array}
 \rightarrow (๖ \times ๑) + (๑ \times ๖) + (๖ \times ๖) + (๑ \times ๑)
 \end{array}$$

$$= ๖ + ๖ + ๓๖ + ๑$$

$$= ๔๙$$

$$\begin{array}{l}
 \text{แบบที่ ๒} \\
 \begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{c} \text{๖} \\ \text{๑} \end{array} & \begin{array}{c} \text{๖} \\ \text{๑} \end{array} \\
 & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} & \\
 \end{array}
 \end{array}
 \rightarrow (๖ \times ๖) + (๑ \times ๑) + (๖ \times ๑) + (๖ \times ๑)$$

$$= ๓๖ + ๑ + ๖ + ๖$$

$$= ๔๙$$

ดังนั้น ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจึงแจ่มแจ้งได้ ๙ วิธี แต่เมื่อพิจารณาต่อไป ถ้าทอดลูกเต๋ารับขึ้นหน้า  $A-B$  และ  $B-A$  การคำนวณตามโจทย์จะได้เลขชุดเดียวกันอีกคือ

$$\begin{array}{l}
 A-B \text{ แบบที่ ๑} \\
 \begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{c} \text{๖} \\ \text{๑} \end{array} & \begin{array}{c} \text{๒} \\ \text{๕} \end{array} \\
 & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} & \\
 \end{array}
 \end{array}
 \rightarrow (๖ \times ๒) + (๑ \times ๕) + (๖ \times ๕) + (๒ \times ๑)$$

$$= ๑๒ + ๕ + ๓๐ + ๒$$

$$= ๔๙$$

$$\begin{array}{l}
 B-A \text{ แบบที่ ๒} \\
 \begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{c} \text{๕} \\ \text{๒} \end{array} & \begin{array}{c} \text{๑} \\ \text{๖} \end{array} \\
 & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} & \\
 \end{array}
 \end{array}
 \rightarrow (๕ \times ๑) + (๒ \times ๖) + (๕ \times ๖) + (๑ \times ๒)$$

$$= ๕ + ๑๒ + ๓๐ + ๒$$

$$= ๔๙$$

ในทำนองเดียวกับ  $A-C$  และ  $C-A$ ,  $B-C$  และ  $C-B$  จึงสามารถตัดทิ้งตัวที่ซ้ำกันออกไป ผลลัพธ์ทั้งหมดจึงเหลือ ๖ วิธี ดังนี้

$$A-A, A-B, A-C, B-B, B-C, C-C$$

ซึ่งเมื่อดำเนินการคำนวณตามโจทย์ จะได้แต่้รวม ๔๙ เท่ากันทุกวิธี

### การพิสูจน์คำตอบ

การพิสูจน์เพื่อหาความยืนยันว่า การคำนวณตามคำสั่งของโจทย์ทั้ง ๓ ข้อ มีคำตอบ ๔๙ จริงเสมอ โดยใช้กฎพีชคณิตเบื้องต้นนั่นเอง

$$\begin{array}{l}
 \text{สมมติให้ } T = \text{ด้านบนของลูกเต๋าลูกที่ ๑} \\
 B = \text{ด้านล่างของลูกเต๋าลูกที่ ๑} \\
 t = \text{ด้านบนของลูกเต๋าลูกที่ ๒} \\
 b = \text{ด้านล่างของลูกเต๋าลูกที่ ๒}
 \end{array}$$



โจทย์กำหนดให้ดำเนินการคำนวณตามขั้นตอน ๓ ข้อ เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$(T \times t) + (B \times b) + (T \times b) + (t \times b) + (t \times B) = 49$$

โดยกฎการสลับที่ของการบวก (Commutative law of Addition)

$$(T \times t) + (T \times b) + (B \times b) + (t \times B) = 49$$

โดยกฎการสลับที่ของการคูณ (Commutative law of Multiplication)

$$(T \times t) + (T \times b) + (B \times b) + (B \times t) = 49$$

โดยกฎการจัดหมู่ของการบวก (Associative law of Addition)

$$[T \times t + T \times b] + [B \times b + B \times t] = 49$$

โดยกฎการกระจาย (Distributive law)

$$T \times (t + T) + B \times (b + t) = 49$$

$$(T + B) \times (t + b) = 49$$

$$7 \times 7 = 49$$

จะเห็นว่า เลข ๔๙ แยกได้เป็น ๗ x ๗ ชุดเดียวเท่านั้น นั่นคือ

$$T + B = 7 \text{ และ } t + b = 7$$

หมายความว่า หน้าที่อยู่ตรงข้ามกันของลูกเต๋า (บน - ล่าง) ต้องรวมกันได้ ๗ ซึ่งถ้าใครมีลูกเต๋าลองหยิบขึ้นมาดูจะเห็นว่าเป็นจริง จึงย้อนกลับไปสรุปว่า สมการที่โจทย์กำหนดจึงมีคำตอบ ๔๙ เสมอ

\*\*\*\*\*