ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

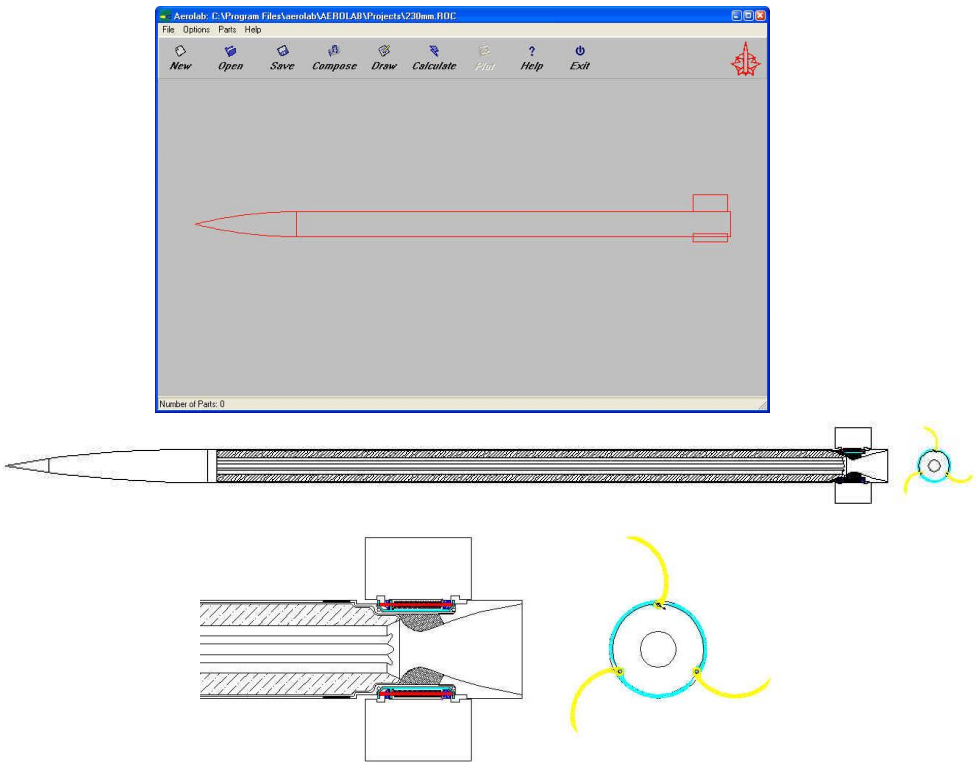
ตอนที่ ๒

น.อ.ผศ. ภาณุฤทธิ์ ยุกตะทัต

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ฝ่ายศึกษา โรงเรียนนายเรือ

ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ตอนที่ ๑ ผู้เขียนได้อธิบายให้เข้าใจขั้นตอนในการหาผลลัพธ์ด้วยการจำลองระบบ โดยการสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้อง จากนั้นจึงแปลงเป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ กำหนดเงื่อนไขขอบเขต หาผลลัพธ์ เพื่อให้วิศวกรผู้ออกแบบมีแนวคิดในการแก้ไขปรับปรุงต้นแบบ จำลองการทำงานด้วยการปรับเปลี่ยนเงื่อนไขขอบเขต หรือปรับปรุงรูปร่างของผลิตภัณฑ์เพื่อให้ได้ประสิทธิภาพดีที่สุด ในตอนนี้ จะแสดงให้เห็นการประยุกต์ใช้งาน และยกตัวอย่างของปัญหาอย่างง่ายเพื่ออธิบายการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ในการแก้ปัญหานั้นด้วยการใช้ซอฟต์แวร์ EasyFEM

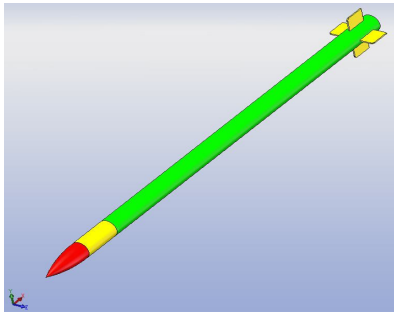
ในปีงบประมาณ ๕๐ ผู้เขียนได้มีโอกาสทดลองวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนภายในลูกจรวดระยะยิงไกลตามแบบที่ ศวอ.ทอ.[๑] ได้ออกแบบไว้ให้มีขนาดตามระยะยิงที่ต้องการ ดังรูปที่ ๑



รูปที่ ๑ การออกแบบด้วยโปรแกรม AeroLab

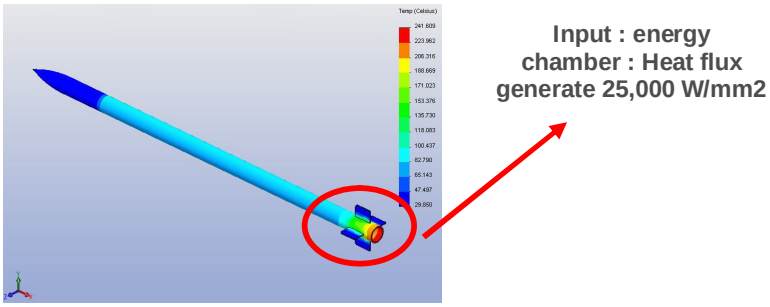
[๑] ศูนย์วิทยาศาสตร์และวิจัยพัฒนาระบบอาวุธ กองทัพอากาศ (ศวอ.ทอ.) ร่วมทำโครงการวิจัยจรวดเพื่อความมั่นคงกับ สวพ.กห.

ในการวิเคราะห์เริ่มจากการสร้างโมเดลของจรวดระยะยิงไกล แต่เนื่องจากรูปร่างของปัญหามีความซับซ้อน โปรแกรม EasyFEM จึงไม่เหมาะแก่การใช้งาน ในที่นี้เลือกใช้ซอฟต์แวร์ SolidWork ในการสร้างแบบจำลอง เพราะมีความสามารถในการเข้ากันได้กับซอฟต์แวร์ในการวิเคราะห์ที่เลือกใช้ คือ COSMOS (มีซอฟต์แวร์เป็นจำนวนมากในท้องตลาด ในการเลือกใช้ขึ้นอยู่กับความต้องการและความถนัดของผู้ใช้) ในเบื้องต้นเป็นการวิเคราะห์ความร้อนที่ท้ายท่อจรวดขณะจุดดินขับ โดยยังไม่คำนึงถึงการเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็ว ๕ เท่าของความเร็วเสียง

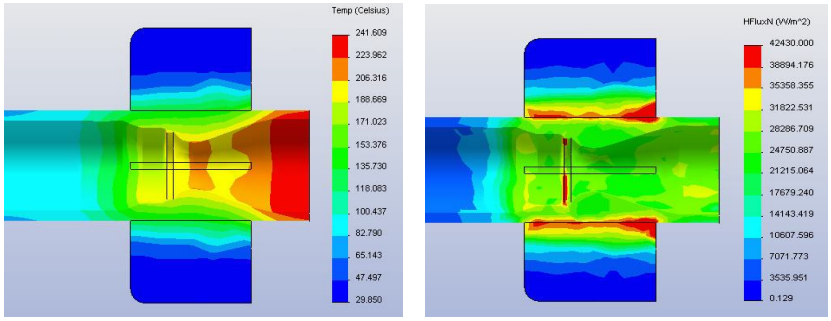


รูปที่ ๒ การสร้างโมเดลของจรวดระยะยิงไกล

เมื่อสร้างโมเดลเสร็จก็ทำการตี Mesh และกำหนดเงื่อนไขขอบเขต แล้วทำการวิเคราะห์ตามกระบวนการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จากผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ Temperature Effect (รูปที่ ๓) จะเห็นได้ว่าบริเวณ Nozzle ด้านท้ายจรวด จะมีความร้อนเกิดขึ้นมาก เนื่องจากการเผาไหม้ของดินขับเชื้อเพลิงแข็งที่บรรจุอยู่ภายใน ซึ่งผลิตเป็นปริมาณความร้อน ๒๕,๐๐๐ วัตต์ต่อตารางมิลลิเมตร ทำให้ต้องทำการวิเคราะห์เฉพาะส่วน Nozzle เพื่อพิจารณา Temperature Profile และ Heat Flux Profile (รูปที่ ๔) ในการจำลองด้วยซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ทำให้สามารถปรับเปลี่ยนรูปร่างลักษณะและเงื่อนไขขอบเขตได้โดยไม่มีขีดจำกัด เพื่อให้เกิดแนวคิดในการปรับปรุงแบบ ให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น และลดค่าใช้จ่ายในการสร้างต้นแบบ ตามที่กล่าวข้างต้น



รูปที่ ๓ Temperature Effect



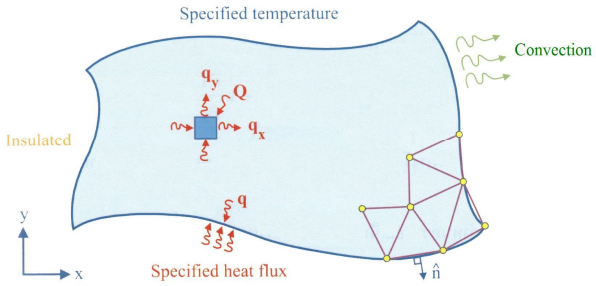
รูปที่ ๔ ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์

วิเคราะห์การถ่ายเทความร้อน

การถ่ายเทความร้อน เป็นตัวอย่างของปัญหาที่ดีในการอธิบายระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เพราะผลลัพธ์ของปัญหานี้คือ อุณหภูมิ ซึ่งมีความหมายทางกายภาพที่สามารถเข้าใจได้โดยง่าย เงื่อนไขขอบเขตชนิดต่างๆ ของปัญหา ก็ไม่มีอะไรซับซ้อนมากนัก และที่สำคัญที่สุดก็คือ ปัญหาการถ่ายเทความร้อนนี้มีตัวไม่รู้ค่า (Unknown) เพียงตัวเดียวเท่านั้น คือ อุณหภูมิ ทำให้สมการเชิงอนุพันธ์ที่ครอบคลุมปัญหามีเพียงสมการเดียว ต่างจากปัญหาเรื่องของแข็งหรือของไหล ซึ่งล้วนประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าหลายตัวที่ต้องหามาจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยหลายสมการ

สมการเชิงอนุพันธ์

ในที่นี้จะกล่าวถึงสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งอธิบายการอนุรักษ์พลังงาน (Conservation of Energy) สำหรับการถ่ายเทความร้อนในแผ่นระนาบบาง (๒ มิติ) ที่มีรูปร่างลักษณะใดๆ โดยที่ตลอดขอบนอกของปัญหาอาจจะประกอบด้วยขอบเขตเงื่อนไขที่แตกต่างกัน นับตั้งแต่การกำหนดอุณหภูมิ การกำหนดปริมาณฟลักซ์ความร้อน การกำหนดความเป็นฉนวน และการกำหนดการพาความร้อนสู่อากาศรอบข้าง ดังรูป



รูปที่ ๕ โดเมนและเงื่อนไขของแผ่นระนาบ

สมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายความสมดุลของปริมาณฟลักซ์ q_x และ q_y ที่ไหลเข้าและออกในแนวแกน x และ y ของเอลิเมนต์เล็กๆ ที่วางตัวอยู่ ณ ตำแหน่งใดๆ ในระนาบ คือ

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}-Q = 0 \quad \text{---------- (1)}$$

โดย Q แทนอัตราปริมาณความร้อนที่ผลิตขึ้นเองต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร

ปริมาณความร้อนเหล่านี้ขึ้นอยู่กับความชันของอุณหภูมิ T (Temperature gradient) และค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (Thermal conductivity – k) ของแผ่นระนาบตามกฎของฟูเรียร์ (Fourier's law) ดังนี้

$$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x} \quad : \quad q_y = -k\frac{\partial T}{\partial y}$$

เมื่อแทนค่า q_x และ q_y ลงในสมการ (1) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+Q = 0 \quad \text{---------- (2)}$$

ความซับซ้อนของลักษณะการกระจายของอุณหภูมิ T(x, y) ที่เกิดขึ้นจากสมการ (2) นี้ขึ้นอยู่กับรูปร่างลักษณะของแผ่นระนาบ และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดให้ เงื่อนไขขอบเขตของขอบแผ่นบางอาจประกอบด้วย

๑) การกำหนดอุณหภูมิตลอดขอบ เช่น

$$T(x,y) = T_1(x,y) \quad \text{---------- (3)}$$

๒) กำหนดปริมาณฟลักซ์คงามร้อนที่ไหลเข้าสู่ขอบ

$$q_s = -q = k\frac{\partial T}{\partial x}n_x + k\frac{\partial T}{\partial y}n_y \quad \text{---------- (4)}$$

โดย n_x และ n_y แทนทิศทาง cosine ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย n ที่ตั้งฉากกับขอบนั้น

๓) การกำหนดว่าขอบเป็นฉนวน ไม่มีปริมาณฟลักซ์ความร้อนไหลเข้าออกได้

$$q = k\frac{\partial T}{\partial x}n_x + k\frac{\partial T}{\partial y}n_y = 0 \quad \text{---------- (5)}$$

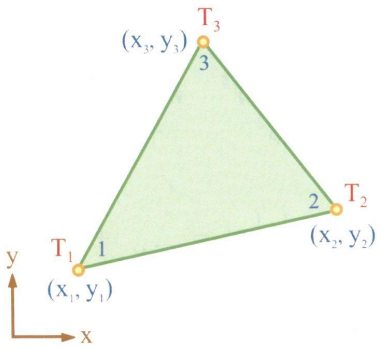
๔) การกำหนดการพาความร้อนสู่ตัวกลางรอบข้าง

$$q = k\frac{\partial T}{\partial x}n_x + k\frac{\partial T}{\partial y}n_y = h(T-T_\infty) \quad \text{---------- (6)}$$

โดย h คือ สัมประสิทธิ์การพาความร้อน และ T_∞ คือ อุณหภูมิเฉลี่ยของตัวกลางรอบข้าง

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยตรงจากสมการเชิงอนุพันธ์ [สมการ (2)] ด้วยการใช้ Method of weight residual [1, 8] ก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปแบบอินทริกัลบนพื้นที่ของเอลิเมนต์ โดยความซับซ้อนจะขึ้นอยู่กับชนิดของเอลิเมนต์ที่ใช้ เช่น การใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม ที่ประกอบด้วยจุดต่อ 3 โหนด จะก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ และเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆ ที่สามารถทำความเข้าใจได้ง่ายกว่าการใช้เอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า นอกจากนั้น เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมยังสามารถนำไปประดิษฐ์เป็นไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมได้โดยสะดวก รวมทั้งยังสามารถสร้างเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมบนรูปร่างที่มีความยุ่งยากซับซ้อนได้ง่ายกว่าการใช้เอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า



รูปที่ ๖ เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 3 โหนด

เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 3 โหนด ดังรูป ประกอบด้วย อุณหภูมิ T_1, T_2, T_3 ซึ่งไม่รู้ค่าที่โหนด 1, 2, 3 ตามลำดับ

โคออดิเนต $x_i, y_i : i = 1, 2, 3$ ของโหนดทั้งสามนี้ล้วนทราบค่าแล้ว หลังจากที่ได้แบ่งรูปแบบของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิบนเอลิเมนต์ชนิดนี้ถูกสมมติให้มีการแปรผันแบบ Flat plane ดังนี้

$$T(x, y) = N_1 T_1 + N_2 T_2 + N_3 T_3 \qquad (7)$$

โดย $N_i : i = 1, 2, 3$ แทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ (Element Interpolation function) คือ

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \qquad (8)$$

ค่า A ในสมการที่ (8) นี้ คือ พื้นที่ของเอลิเมนต์ซึ่งคำนวณได้โดยตรงจากโคออดิเนตของโหนดทั้งสาม คือ

$$A = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \quad \text{(9)}$$

โดยสัมประสิทธิ์

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2 \quad b_1 = y_2 - y_3 \quad c_1 = x_3 - x_2 \\ a_2 &= x_3y_1 - x_1y_3 \quad b_2 = y_3 - y_1 \quad c_2 = x_1 - x_3 \\ a_3 &= x_1y_2 - x_2y_1 \quad b_3 = y_1 - y_2 \quad c_3 = x_2 - x_1 \end{aligned} \quad \text{(10)}$$

การประยุกต์ใช้ Method of weight residual ลงบนสมการเชิงอนุพันธ์ [สมการ (2)] ผสมผสานกับการใช้เงื่อนไขขอบเขตชนิดต่างๆ [สมการ (๓) – (๖)] ก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ [1, 15] คือ

$$\underset{(3\times3)}{[[K_c]} + \underset{(3\times3)}{[K_h]]} \underset{(3\times1)}{\{T\}} = \underset{(3\times1)}{\{Q_Q\}} + \underset{(3\times1)}{\{Q_q\}} + \underset{(3\times1)}{\{Q_h\}} \quad \text{(11)}$$

ในสมการไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ $[K_c]$ คือเมตริกซ์ของการนำความร้อน ซึ่งสำหรับเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมสามารถคำนวณได้โดยตรงจาก

$$\underset{(3\times3)}{[K_c]} = kAT \underset{(3\times2)}{[B]^T} \underset{(2\times3)}{[B]} \quad \text{(12)}$$

โดย t คือ ความหนาของแผ่นระนาบ และ

$$[B] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad \text{(13)}$$

ส่วน $[K_h]$ แทนเมตริกซ์ของการพาความร้อน

สำหรับเอลิเมนต์ที่ติดอยู่กับขอบและมีการพาความร้อนเข้าหรือออกสู่ตัวกลางรอบข้าง เช่น หากขอบเอลิเมนต์ที่มีการพาความร้อนมีความยาว ℓ ซึ่งอยู่ระหว่างโหนด 1 และ 2 เมตริกซ์ของการพาความร้อนที่เกิดขึ้นนี้ คือ

$$[K_h] = \frac{htl}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(14)}$$

และโหลดเวกเตอร์ของการพาความร้อน $\{Q_h\}$ ที่สอดคล้องกัน คือ

$$\{Q_h\} = \frac{htlT_\infty}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{(15)}$$

อย่างไรก็ตาม หากปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ไม่มีการพาความร้อนตามขอบ จะไม่ปรากฏเมตริกซ์ $[K_h]$ และเวกเตอร์ $\{Q_h\}$ ในสมการไฟไนต์เอลิเมนต์

สำหรับโหลดเวกเตอร์ที่เหลือทางด้านขวาของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ คือ $\{Q_Q\}$ คือ ปริมาณฟลักซ์ความร้อนอันเนื่องมาจากการผลิตความร้อน Q ภายในเอลิเมนต์นั้นเอง โดย

$$\{Q_Q\} = \frac{QAt}{3}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix} \qquad (16)$$

และ $\{Q_q\}$ คือโหลดเวกเตอร์จากการกำหนดปริมาณฟลักซ์ความร้อน q_s ที่เข้าสู่ขอบ เช่น หากขอบเอลิเมนต์ที่มีการกำหนดปริมาณฟลักซ์ความร้อนนี้ยาว ℓ และอยู่ระหว่างโหนดหมายเลข 2 และ 3 แล้ว โหลดเวกเตอร์นี้ คือ

$$\{Q_q\} = \frac{q_s t \ell}{2}\begin{Bmatrix}0\\1\\1\end{Bmatrix} \qquad (17)$$

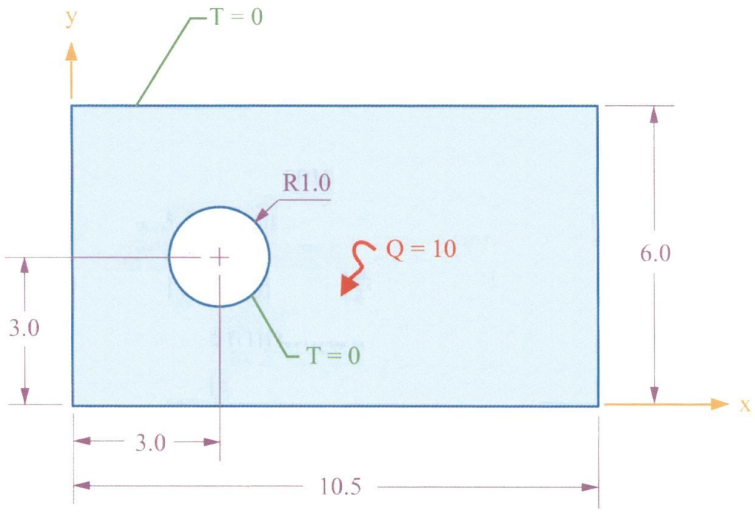
จากที่อธิบายข้างต้น จะเห็นได้ว่าเมตริกซ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นจากการใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมจะอยู่ในรูปแบบอย่างง่าย และพร้อมที่จะนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง เพื่อใช้ในการวิเคราะห์หาผลลัพธ์การถ่ายเทความร้อนภายในรูปร่างซับซ้อนใด ๆ ก็ได้ ไม่ว่าจะเป็นแผ่นเรียบที่มีส่วนโค้งส่วนเว้าภายนอก หรืออาจจะมีรูเจาะภายใน โดยตลอดขอบทั้งภายนอกและภายในอาจจะประกอบด้วยเงื่อนไขขอบเขตที่แตกต่างกันก็ได้

สำหรับตัวอย่างการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในที่นี้ จะแสดงผลลัพธ์โดยใช้ซอฟต์แวร์ EasyFEM ซึ่งเป็นซอฟต์แวร์ที่พัฒนาโดยคนไทย และเป็นลิขสิทธิ์ของ ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ซอฟต์แวร์ EasyFEM ได้ถูกออกแบบให้สามารถทำงานภายใต้ระบบปฏิบัติการวินโดวส์ จึงสามารถใช้งานได้ง่ายบนเครื่องคอมพิวเตอร์โดยทั่วไป ในตัวอย่างจะแสดงขั้นตอนต่าง ๆ ในการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ นับตั้งแต่กระบวนการขั้นต้น คือการสร้างรูปร่างของปัญหา (Geometry) กำหนดขอบเขตโดเมนของปัญหา (Defining Boundary) การสร้างเอลิเมนต์ (Meshing) การกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Constraint) และการประยุกต์โหลด (Load Applying) จากนั้นจึงทำการวิเคราะห์ปัญหา (Analyze) แล้วจึงแสดงผลลัพธ์ตามกระบวนการขั้นท้าย (Displaying Result) ด้วยวิธีการต่าง ๆ ให้ผู้ใช้มีแนวคิดในการปรับปรุงต้นแบบต่อไป

ปัญหาการถ่ายเทความร้อนในแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีรูเจาะ

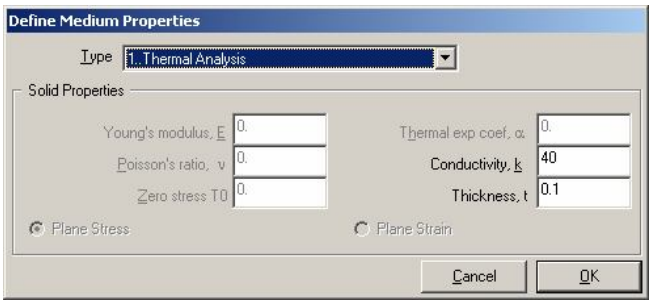
สมมติว่าต้องการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนภายในรูปร่างของปัญหาที่เป็นแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีความหนา 0.1 เมตร มีรูเจาะรูปวงกลมอยู่ภายใน ดังแสดงตามรูป ซึ่งกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (k) เท่ากับ 40 วัตต์ต่อเมตร-องศาเซลเซียส ขอบทุกขอบของโมเดลมีอุณหภูมิ

เท่ากับ 0 และอัตราปริมาณความร้อนที่ผลิตได้เองเท่ากับ 10 วัตต์ต่อลูกบาศก์เมตรตลอดทั้งแผ่นสี่เหลี่ยม



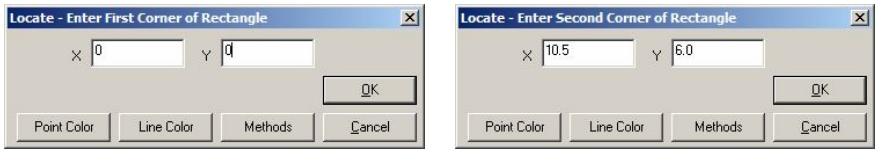
รูปที่ ๗ ปัญหาแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีรูเจาะรูปวงกลมอยู่ภายใน

เมื่อทราบปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ ขั้นตอนแรกในกระบวนการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ คือ เมื่อเปิดโปรแกรม EasyFEM ขึ้นมาก็ต้องกำหนดพื้นที่สำหรับการสร้างแบบจำลองเพื่อวิเคราะห์ปัญหา โดยใช้คำสั่ง File → New จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ Define Medium Properties ซึ่งเป็นกล่องสนทนาสำหรับใส่คุณสมบัติของวัสดุสำหรับปัญหาการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อน จากนั้นให้ทำการกรอกค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนเท่ากับ 40 ลงในช่อง Conductivity, k และความหนา 0.1 ลงในช่อง Thickness, t แล้วคลิก OK ดังรูป

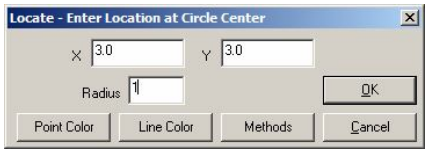


รูปที่ ๘ ไดอะล็อกบ๊อกซ์ Define Medium Properties

ขั้นตอนต่อไปเป็นการสร้างโมเดล โดยเริ่มจากกำหนดจุดเริ่มต้นของแกน x-y และพิกัดจุดปลายของโดเมนที่ต้องการวิเคราะห์ การสร้างโมเดลใช้คำสั่ง Create → Line → Rectangle จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ Locate – Enter First Corner of Rectangle ให้ใส่ตัวเลขของพิกัดของจุดเท่ากับ (๐, ๐) ลงในช่อง x และ y จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ Locate – Enter Second Corner of Rectangle ให้ใส่ตัวเลขของพิกัดของจุดเท่ากับ (10.5, 6.0) แล้วคลิกที่ปุ่ม OK เป็นอันเสร็จกระบวนการ คลิก Cancel เพื่อปิดไดอะล็อกบ๊อกซ์ ดังแสดงตามรูป

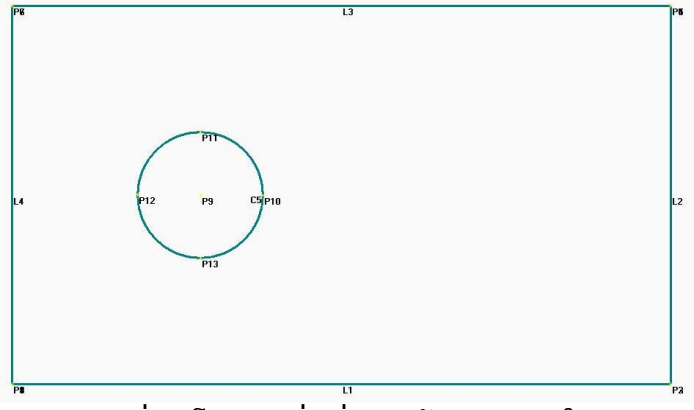


รูปที่ ๙ ไดอะล็อกบ๊อกซ์การกำหนดพิกัดมุมของสี่เหลี่ยม



รูปที่ ๑๐ ไดอะล็อกบ๊อกซ์การกำหนดพิกัดจุดศูนย์กลางและรัศมีของรูวงกลมภายในรูปสี่เหลี่ยม

จากนั้นให้ใช้คำสั่ง Create → Circle → Center เพื่อสร้างวงกลมรัศมี 1 โดยมีพิกัดของจุดศูนย์กลางวงกลมคือ (3, 3) ก็จะได้รูปร่างโมเดลของปัญหา ดังแสดงตามรูป



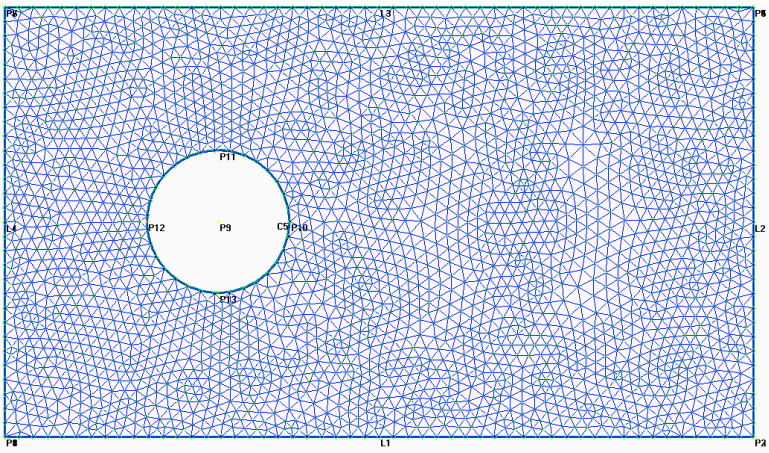
รูปที่ ๑๑ โมเดลรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีรูกลมภายใน

ลำดับต่อไปเป็นขั้นตอนการกำหนดขอบเขตของโดเมน (Boundary) เพื่อเตรียมสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมย่อยๆ ต่อไปด้วยการใช้คำสั่ง Mesh → Define Boundary จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ Select Curve(s) on Outer Boundary ให้ทำการเลือกเส้นขอบนอกทั้งสี่ของโมเดล (L1 ถึง L4) แล้วคลิกที่ปุ่ม OK จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ถามว่าโดเมนที่เลือกมีรูภายในหรือไม่ ให้คลิกที่ปุ่ม Yes ก็จะปรากฏไดอะล็อกซ์บ๊อกซ์ให้เลือกรู คลิกที่ขอบวงกลม C5 แล้วคลิกที่ปุ่ม OK จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ถามว่าโดเมนที่เลือกมีรูภายในอีกหรือไม่ คราวนี้ให้คลิกที่ปุ่ม No

ในการสร้างเอลิเมนต์ย่อย ในซอฟต์แวร์ EasyFEM มีเอลิเมนต์ให้เลือกทั้งแบบที่มีระเบียบและไร้ระเบียบ สำหรับกรณีที่ต้องการสร้างเอลิเมนต์แบบไร้ระเบียบ ให้เลือกใช้คำสั่ง Mesh → Mesh Size → Default เพื่อกำหนดขนาดของเอลิเมนต์ จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ Default Mesh Size ให้ใส่ค่า 0.2 ลงในช่อง Size และใส่ค่า 3 ลงในช่อง Minimum Element ดังแสดงตามรูป

รูปที่ ๑๒ ไดอะล็อกบ๊อกซ์ Default Mesh Size

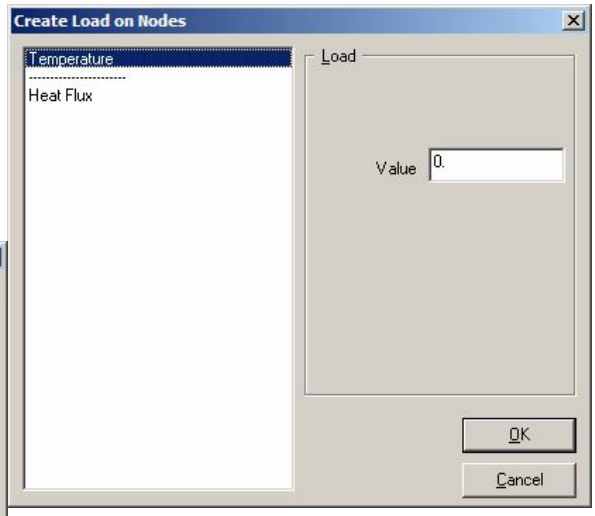
จากนั้นจึงเลือกใช้คำสั่ง Mesh → Unstructured Mesh จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ Select Boundary(s) to Mesh ให้คลิกลงบนพื้นที่ของขอบเขตโดเมน ซึ่งขอบเขตที่ถูกเลือกจะปรากฏในไดอะล็อกบ๊อกซ์นี้ แล้วคลิกที่ปุ่ม OK โปรแกรมจะทำการสร้างเอลิเมนต์ย่อยภายในโมเดลตามขอบเขตที่กำหนด ดังรูป



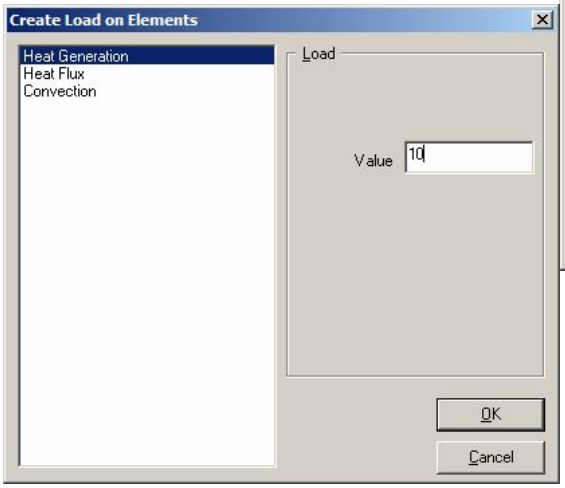
รูปที่ ๑๓ เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบไร้ระเบียบ

ขั้นตอนต่อไปเป็นการกำหนดโหลด เริ่มจากการกำหนดอุณหภูมิเท่ากับ ๐ ให้กับจุดต่อทั้งหมดตามขอบของโมเดล โดยใช้คำสั่ง Create → Load → On Node (Curve specified) จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ Enter Node(s) to Select ให้คลิกที่ปุ่ม Select All เพื่อเลือกเส้นทั้งหมด แล้วคลิก OK

จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ Create Load on Nodes ให้เลือกที่ Temperature แล้วใส่ค่า 0 ลงในช่อง Value จากนั้นคลิกที่ปุ่ม OK เป็นอันเสร็จสิ้นการสร้างโหลดอุณหภูมิเท่ากับ 0 ลงบนจุดต่อทั้งหมด



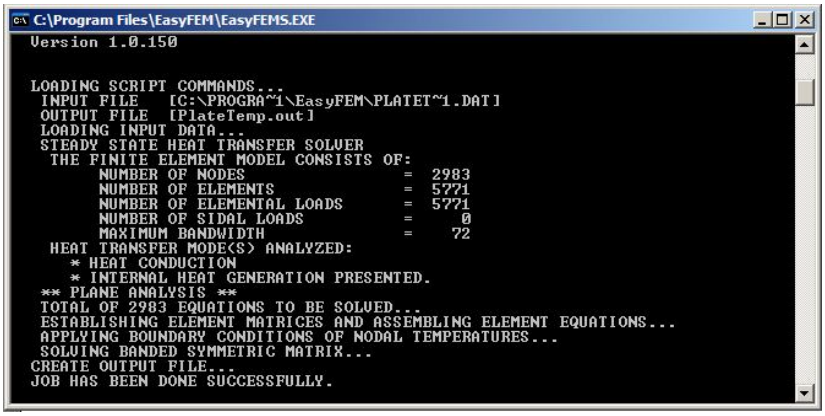
รูปที่ ๑๔ ไดอะล็อกบ๊อกซ์ Create Load on Nodes



รูปที่ ๑๕ ไดอะล็อกบ๊อกซ์ Create Load on Elements

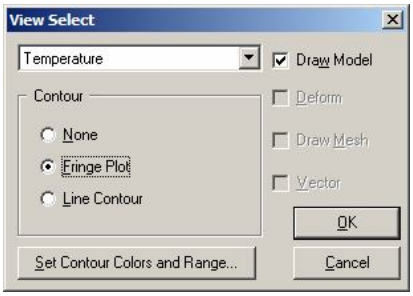
ส่วนการสร้างโหลดอุณหภูมิชนิดการผลิตความร้อนได้เองบนเอลิเมนต์ ให้ใช้คำสั่ง Create → Load → On Element เมื่อปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ให้คลิกที่ Select All เพื่อเลือกเอลิเมนต์ทั้งหมด แล้วคลิกปุ่ม OK จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ Create Load on Elements ให้เลือกที่ Heat Generation แล้วใส่ค่า 10 ลงในช่อง Value แล้วคลิกที่ปุ่ม OK เป็นอันเสร็จสิ้นการสร้างโหลดอัตราปริมาณความร้อนที่ผลิตได้เองเท่ากับ 10 วัตต์ต่อลูกบาศก์เมตร ดังรูป

เมื่อถึงขั้นตอนนี้เป็นอันเสร็จสิ้นกระบวนการขั้นต้น (Pre-processor) ให้ทำการบันทึกข้อมูลลงในไฟล์โดยใช้คำสั่ง File → Save ตั้งชื่อไฟล์ว่า PlateTemp ในกระบวนการขั้นต่อไปเป็นการวิเคราะห์ปัญหา สามารถทำได้โดยใช้คำสั่ง File → Analyze จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ Export Analyze Data ให้คลิกที่ปุ่ม OK เพื่อทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยโปรแกรม EasyFEM ในระหว่างการวิเคราะห์โปรแกรมจะเรียกส่วนวิเคราะห์ที่เรียกว่า EasyFEMS มาทำงาน จะเห็นว่าปรากฏเป็นหน้าต่างการวิเคราะห์ ซึ่งหน้าต่างนี้จะปิดลงเมื่อวิเคราะห์เสร็จ ดังแสดงตามรูป

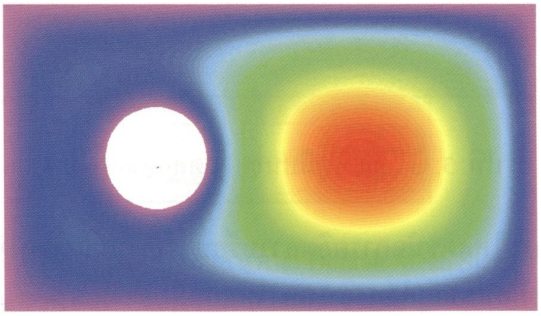


รูปที่ ๑๖ หน้าต่างการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม EasyFEMS

ในกระบวนการขั้นท้ายของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ คือ การแสดงผลลัพธ์ สามารถทำได้โดยใช้คำสั่ง View → Select จะปรากฏไดอะล็อกบ๊อกซ์ View Select ให้เลือกการแสดงผลลัพธ์ตามที่ต้องการ ทดลองเลือกที่ Temperature แล้วคลิกเลือกที่ Fringe Plot แล้วคลิก OK เพื่อแสดงผลด้วยแถบชั้นสีของอุณหภูมิแบบ ๖๔ ระดับสี

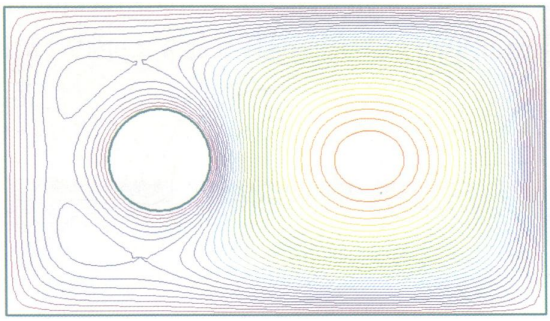


รูปที่ ๑๗ ไดอะล็อกบ๊อกซ์View Select



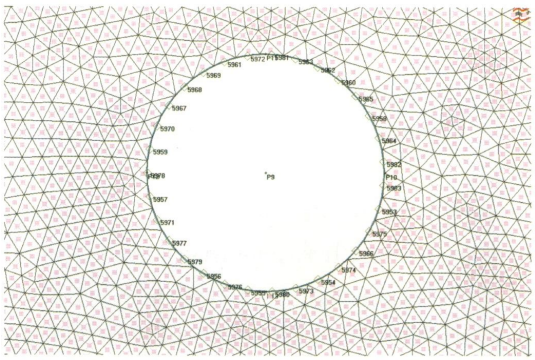
รูปที่ ๑๘ การแสดงผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิด้วยแถบชั้นสี

หากคลิกเลือกที่ Line Contour แล้วคลิก OK จะเป็นการแสดงผลด้วยเส้นชั้นสีและขอบเขตโดเมน จะได้ผลลัพธ์ดังแสดงตามรูป



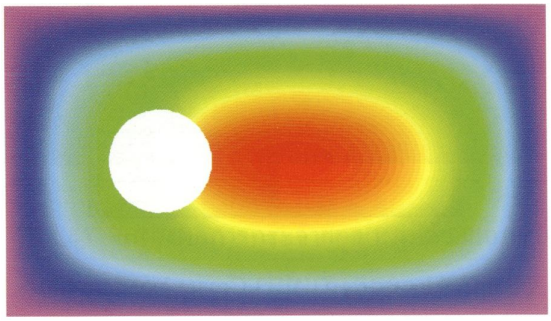
รูปที่ ๑๙ การแสดงผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิด้วยเส้นชั้นสีและขอบเขตโดเมน

จากที่กล่าวข้างต้น มีปัจจัย ๓ ประการที่จะทำให้ผลลัพธ์ต่าง ๆ เหล่านี้เกิดการเปลี่ยนแปลง คือ (๑) สมการเชิงอนุพันธ์ (๒) เงื่อนไขขอบเขต และ (๓) รูปร่างลักษณะของปัญหา ในที่นี้จะลองยกตัวอย่างการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขขอบเขต โดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์เดิม และรูปร่างของปัญหาคงเดิม เพื่อประหยัดเวลาในการสร้างโมเดลใหม่ สมมติว่าโหลดที่รูวงกลมภายในเปลี่ยนจากการกำหนดอุณหภูมิมาเป็นผนังแบบหุ้มฉนวน (Insulated wall) ดังนั้นในขั้นตอนการกำหนดโหลดที่รูภายใน จะใช้โหลดแบบฟลักซ์ความร้อน (Heat Flux) โดยกำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์ (เลือกที่ Heat Flux ในรูปที่ ๑๕) ในการกำหนดโหลดชนิดฟลักซ์ความร้อนจะปรากฏสัญลักษณ์ ◇ ภายในเอลิเมนต์บนโมเดล ดังแสดงตามรูป



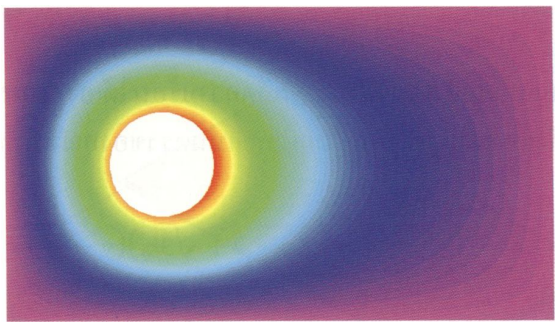
รูปที่ ๒๐ โหลดชนิดฟลักซ์ความร้อนบนขอบเอลิเมนต์ตลอดรูวงกลมภายในโมเดล

เมื่อทำการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง File → Analyze แล้วเลือกแสดงผลด้วยแถบชั้นสีของอุณหภูมิแบบ ๖๔ ระดับสี ให้คลิกเลือกที่ Fringe Plot ในไดอะล็อกบ๊อกซ์ View Select แล้วคลิก OK จะได้ผลลัพธ์ดังแสดงตามรูป



รูปที่ ๒๑ การแสดงผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิด้วยแถบชั้นสี ในกรณีขอบรูวงกลมเป็นฉนวน

และสมมติว่า โหลดที่รูภายในเป็นการพาความร้อน (Heat Convection) โดยกำหนดค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน (h) เท่ากับ 20 วัตต์ต่อตารางเมตร-องศาเซลเซียส และอุณหภูมิรอบข้างเท่ากับ 25 องศาเซลเซียส การกำหนดโหลดลงบนโมเดล (เลือกที่ Convection ในรูปที่ ๑๕) จึงใช้โหลดชนิดการพาความร้อน และกำหนดอุณหภูมิที่ขอบเท่ากับ 25 จะปรากฏสัญลักษณ์ ▷ ภายในเอลิเมนต์บนโมเดล ซึ่งเมื่อทำการวิเคราะห์ด้วยคำสั่ง File → Analyze แล้วเลือกแสดงผลด้วยแถบชั้นสีของอุณหภูมิแบบ ๖๔ ระดับสี ให้คลิกเลือกที่ Fringe Plot ในไดอะล็อกบ๊อกซ์ View Select แล้วคลิก OK จะได้ผลลัพธ์ดังแสดงตามรูป



รูปที่ ๒๒ การแสดงผลลัพธ์การกระจายของอุณหภูมิด้วยแถบชั้นสี ในกรณีมีการพาความร้อน

บทสรุป

จากการที่ได้อธิบายการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนด้วยการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยซอฟต์แวร์ EasyFEM ช่วยให้ผู้อ่านสามารถเห็นผลลัพธ์ได้โดยง่าย โดยเฉพาะอย่างยิ่งปัญหาการถ่ายเทความร้อนเป็นปัญหาที่สามารถวิเคราะห์ และทำความเข้าใจได้โดยง่าย เพราะมีอุณหภูมิเป็นตัวไม่รู้ค่าเพียงตัวเดียว ซึ่งสามารถหาค่าได้จากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เพียงสมการเดียว และสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์นี้ก็สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยง่ายโดยเฉพาะการเลือกใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมที่นำไปสู่ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ในรูปแบบง่าย ๆ นอกจากนั้นหากผู้อ่านผ่านการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ทางวิศวกรรมชั้นสูง ย่อมตระหนักได้เป็นอย่างดีว่า การได้มาซึ่งความเที่ยงตรงแม่นยำของผลลัพธ์สำหรับปัญหารูปร่างลักษณะอย่างง่าย และประกอบด้วยเงื่อนไขขอบเขตอย่างง่าย ยังเป็นสิ่งที่ทำได้ยากลำบากและใช้เวลานาน การแก้ปัญหาด้วยซอฟต์แวร์ไฟไนต์เอลิเมนต์จึงช่วยนักวิเคราะห์ได้เป็นอย่างมาก โดยเฉพาะในกรณีที่รูปร่างลักษณะของปัญหามีความยุ่งยากซับซ้อนภายใต้เงื่อนไขขอบเขตที่แตกต่างกัน

เอกสารอ้างอิง

ปราโมทย์ เดชะอำไพ. *ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม.* สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, ๒๕๔๗.

ปราโมทย์ เดชะอำไพ. *ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม.* สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, ๒๕๔๖.

ศูนย์บริการปรึกษาการออกแบบและวิศวกรรม (DECC). *ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ขั้นพื้นฐาน*, ๒๕๕๐.

สวพ.กห. *รายงานความก้าวหน้าโครงการจรวดเพื่อความมั่นคงระยะที่ ๑*. ๒๕๕๐.

University of Corolado. Dept. of Aerospace Eng. *Introduction to FEM*. 2005.