การคำนวณเงินผ่อนชำระของสหกรณ์ออมทรัพย์วังเดิม

น.ท.ปิยะ ลิ้มสกุล
อาจารย์ฝ่ายศึกษา โรงเรียนนายเรือ

หลายท่านคงจะเคยกู้เงินจาก สหกรณ์ออมทรัพย์วังเดิม (สอ.วด.) มาบ้างแล้ว สิ่งที่ผู้เขียนสนใจในเรื่องการกู้เงินคือ เขาคิดดอกเบี้ย และอัตราการผ่อนชำระกันอย่างไร สำหรับท่านที่เคยทำธุรกรรมนี้อาจจะสงสัยกันบ้าง และเมื่อสอบถามไปยังผู้ที่เกี่ยวข้องคือเจ้าหน้าที่การเงิน ก็อาจจะได้คำตอบที่เป็นตัวเลขอันมาจากตารางเปรียบเทียบที่ทำไว้เสร็จสมบูรณ์แล้ว แต่หาคนที่อธิบายที่มาของมันไม่ได้ และเมื่อถามถึงตัวเลขที่ไม่ตรงกับในตารางเลยก็อาจไม่ได้คำตอบ ดังนั้นถ้าหากว่าเราหาสูตรการคำนวณดอกเบี้ย เงินต้น งวดการผ่อนชำระ และอัตราการผ่อนชำระในแต่ละงวดได้ ก็น่าจะเป็นประโยชน์ ในการวางแผนกู้เงินสำหรับท่านที่สนใจ เนื่องจากไม่ต้องใช้ตารางก็คำนวณเองได้ เนื้อหาของบทความฉบับนี้จึงเป็นการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ เพื่อค้นหาสูตรสำเร็จในการคำนวณดังกล่าว โดยเริ่มต้นจากการพิจารณาแนวความคิดหลักในการผ่อนชำระ จากนั้นจึงสร้างตัวแปรที่เกี่ยวข้อง สร้างสมการจากความสัมพันธ์ของตัวแปรเหล่านี้ แล้วทำการวิเคราะห์สมการเพื่อให้ได้สูตรของคำตอบที่เราต้องการ แล้วจึงนำไปทดลองกับตัวอย่างเพื่อทำความเข้าใจก่อนนำไปใช้งาน สุดท้ายสำหรับท่านผู้อ่านที่สนใจจะนำสูตรที่ได้ไปใช้งานโดยไม่ต้องการอ่านรายละเอียดและที่มาของสูตร ก็สามารถข้ามส่วนของการวิเคราะห์ ไปอ่านในส่วนของสรุปสูตรและการใช้งานในช่วงท้ายของบทความได้

แนวความคิดหลัก

ก่อนการวิเคราะห์ปัญหา จะต้องศึกษาข้อเท็จจริง ข้อกำหนด และเงื่อนไขต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องเสียก่อน เพื่อนำมาเป็นพื้นฐานในการคิดคำนวณ สำหรับการกู้เงินของ สอ.วด.นั้น แนวทางในการผ่อนชำระที่สำคัญ สามารถแจกแจงออกได้ ๔ ข้อ ดังนี้

๑. การผ่อนชำระจะจ่ายเป็นงวด ๆ ละ ๑ เดือน
๒. จำนวนเงินที่ผ่อนชำระจะต้องเท่ากันทุกงวด
๓. การผ่อนชำระของ สอ.วด.นี้เป็นแบบ ลดเงินต้น ลดดอกเบี้ยลง ทุกครั้งที่จ่ายเงินผ่อน ดังนั้นจำนวนเงินที่ผ่อนชำระในแต่ละงวดจะประกอบด้วย
    ก. เงินที่ชำระคืนในส่วนของเงินต้น

ข. เงินที่ชำระคืนในส่วนของดอกเบี้ยที่คิดจากเงินต้นคงเหลือ ณ เวลานั้น

๔. เงินต้นพร้อมดอกเบี้ยจะถูกชำระจนหมดพอดีในการผ่อนชำระงวดสุดท้าย

การกำหนดตัวแปร และสมการที่จำเป็นเพื่อการคำนวณ

ตัวแปรต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง กำหนดไว้ดังนี้

- P = เงินผ่อนชำระต่อเดือน
- n = จำนวนเดือนหรืองวดของการผ่อนชำระ
- I = สัมประสิทธิ์อัตราดอกเบี้ยต่อเดือน = $\dfrac{\textit{อัตราดอกเบี้ยร้อยละต่อปี}}{100\times 12}$
- L_0 = เงินกู้ หรือเงินต้น
- L_{i-1} = เงินต้นคงเหลือในเดือนที่ i

หมายเหตุ : ถ้ามีการผ่อนชำระทั้งหมด n งวด ดังนั้นเงินต้นคงเหลือในงวดที่ $n+1$ จะต้องไม่มี นั่นคือ $L_n = 0$

การคำนวณเงินต้นคงเหลือในแต่ละเดือน จะเป็นดังนี้

เดือนที่

1 เงินต้นคงเหลือ = L_0 เงินผ่อนในส่วนของดอกเบี้ย = $L_o I$

เงินผ่อนในส่วนของเงินต้น = $P - L_0 I$

2 $$L_1 = L_0 - (P - L_0 I) = L_0(2+I) - P \rightarrow L_0 = \frac{L_1 + P}{(1+I)} \quad (1)$$

3 $$L_2 = L_1 - (P - L_1 I) = L_1(1+I) - P \rightarrow L_1 = \frac{L_2 + P}{(1+I)} \quad (2)$$

4 $$L_3 = L_2 - (P - L_2 I) = L_2(1+I) - P \rightarrow L_2 = \frac{L_3 + P}{(1+I)} \quad (3)$$

$n+1$ $$L_n = L_{n-1} - (P - L_{n-1} I) = L_{n-1}(1+I) - P \rightarrow L_{n-1} = \frac{P}{(1+I)} \quad (4)$$

พิจารณาสมการที่ (1) , $L_0 = \dfrac{L_1 + P}{(1+I)} = \dfrac{L_1}{1+I} + \dfrac{P}{(1+I)}$ เมื่อแทนค่า L_1 ในสมการที่ (2) ลงไป จะได้

$$L_0 = \frac{1}{(1+I)^2}\cdot\frac{L_2+P}{(1+I)} + \frac{P}{(1+I)} = \frac{L_3}{(1+I)^3} + \frac{P}{(1+I)^3} + \frac{P}{(1+I)^2} + \frac{P}{(1+I)}$$

และ แทนค่า L_2 จากสมการที่ (3) ลงไปจะได้

$L_0 = \frac{1}{(1+I)^2} \cdot \frac{L_3 + P}{(1+I)} + \frac{P}{(1+I)^2} + \frac{P}{(1+I)} = \frac{L_3}{(1+I)^3} + \frac{P}{(1+I)^3} + \frac{P}{(1+I)^2} + \frac{P}{(1+I)}$ จะเห็นว่าเราสามารถแทนค่าได้จนถึง ค่าของ L_{n-1} ซึ่งสมการจะเป็นดังนี้

$$L_0 = \frac{L_{n-1}}{(1+I)^{n-1}} + \frac{P}{(1+I)^{n-1}} + \ldots + \frac{P}{(1+I)^2} + \frac{P}{(1+I)}$$

$$= \frac{1}{(1+I)^{n-1}} \cdot \frac{P}{(1+I)} + \frac{P}{(1+I)^{n-1}} + \ldots + \frac{P}{(1+I)^2} + \frac{P}{(1+I)} \tag{5}$$

$$L_0 = \frac{P}{(1+I)^n} + \frac{P}{(1+I)^{n-1}} + \ldots + \frac{P}{(1+I)^2} + \frac{P}{(1+I)}$$ ในที่สุดจะได้

$$\boxed{L_0 = P\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+I)^j}} \tag{6}$$

ถ้ากำหนดให้

$$M = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+I)^j} = \frac{1}{(1+I)} + \frac{1}{(1+I)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+I)^{n-1}} + \frac{1}{(1+I)^n} \tag{7}$$

คูณสมการที่ (7) ด้วยค่า $(1+I)$ ทั้งสองข้างจะได้

$$(1+I)M = 1 + \frac{1}{(1+I)} + \frac{1}{(1+I)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+I)^{n-1}} = 1 + M - \frac{1}{(1+I)^n}$$

$$M + I\,M = M + \frac{(1+I)^n - 1}{(1+I)^n} \rightarrow M = \frac{(1+I)^n - 1}{I(1+I)^n}$$ โดยที่

$$M = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+I)^j} \quad \text{ดังนั้น} \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+I)^j} = \frac{(1+I)^n - 1}{I(1+I)^n} \tag{8}$$

จากสมการที่ (6) เมื่อแทนค่า M ในสมการที่ (8) จะได้

$$\boxed{L_0 = P\,M = P\left[\frac{(1+I)^n - 1}{I(1+I)^n}\right]} \tag{9}$$

$\therefore$ เงินผ่อนชำระต่อเดือนจะคำนวณด้วยสมการ $$\boxed{P = \frac{L_0 I (1+I)^n}{(1+I)^n - 1}} \tag{10}$$

และจำนวนดอกเบี้ยทั้งหมดที่เสียให้แก่ สอ.วด. สามารถคำนวณจาก เงินผ่อนชำระรวมทั้งหมด หักด้วยเงินต้นดังนี้

$$\boxed{\text{ดอกเบี้ยรวม} = nP - L_0} \tag{11}$$

พิจารณาสมการที่ (5) จะเห็นความสัมพันธ์ของเงินต้นคงเหลือ และตัวแปรอื่น ๆ ณ งวดที่ t ใด ๆ เป็นดังนี้

$$L_0 = \frac{L_{t-1}}{(1+I)^{t-1}} + \frac{P}{(1+I)^{t-1}} + \ldots + \frac{P}{(1+I)^2} + \frac{P}{(1+I)} = \frac{L_{t-1}}{(1+I)^{t-1}} + P\sum_{j=1}^{t-1} \frac{1}{(1+I)^j}$$

$\therefore \quad L_{t-1} = (1+I)^{t-1}\left(L_0 - P\sum_{j=1}^{t-1}\frac{1}{(1+I)^j}\right)$ เราสามารถหาค่าของเทอม $\sum_{j=1}^{t-1}\frac{1}{(1+I)^j}$ ได้โดยใช้ประโยชน์จากสมการที่ (8)

ดังนั้น $\sum_{j=1}^{t-1}\frac{1}{(1+I)^j} = \frac{(1+I)^{t-1}-1}{I(1+I)^{t-1}}$ เมื่อแทนค่าลงไปในสมการของ L_{t-1} จะได้

$$L_{t-1} = (1+I)^{t-1}\left(L_0 - P\left[\frac{(1+I)^{t-1}-1}{I(1+I)^{t-1}}\right]\right) = (1+I)^{t-1}L_0 - \frac{P(1+I)^{t-1}+P}{I}$$

$$= \frac{I(1+I)^{t-1}L_0}{I} - \frac{P(1+I)^{t-1}+P}{I}$$

ในกรณีที่ต้องการชำระหนี้ให้หมดก่อนกำหนด สามารถคำนวณหาเงินต้นคงเหลือ ณ งวดที่ t ได้จากสมการนี้

$$\boxed{L_{t-1} = \frac{(1+I)^{t-1}[IL_0 - P]+P}{I}} \qquad (12)$$

จากสมการที่ (10) เราสามารถจัดรูปใหม่เพื่อใช้คำนวณหาค่าของ จำนวนงวด n ได้ดังนี้

$$P = \frac{L_0 I(1+I)^n}{(1+I)^n - 1} \rightarrow P\left[(1+I)^n - 1\right] = L_0 I(1+I)^n$$

$$P(1+I)^n - P = L_0(1+I)^n$$

$$P(1+I)^n - L_0 I\,(1+I)^n = P \rightarrow (1+I)^n\,[P - L_0 I] = P \rightarrow (1+I)^n = \frac{P}{P - L_0 I}$$

ใช้ logarithm ช่วย จะได้

$$n\log(1+I) = \log\left(\frac{P}{P-L_0 I}\right) \qquad \therefore \quad \boxed{n = \frac{\log\left(\frac{P}{P-L_0 I}\right)}{\log(1+i)}} \qquad (13)$$

ประโยชน์ของสมการที่ (13) คือ เมื่อใดก็ตามที่ผู้ผ่อนชำระต้องการจะลดจำนวนงวดลง โดยการจ่ายเงินเพิ่มอีกจำนวนหนึ่งเพื่อไปลดเงินต้นคงเหลือในปัจจุบัน ก็จะสามารถหางวดค้างชำระที่เหลือน้อยลง

ได้จากการแทนค่า L_0 ในสมการ ด้วย L_o' คือเงินต้นคงเหลือหลังจากหักเงินจำนวนดังกล่าวแล้ว สำหรับ n ที่คำนวณได้นั้น ถ้ามีค่าเศษทศนิยมให้ปัดขึ้นเป็นจำนวนเต็มค่าถัดไป

ตัวอย่าง ถ้าต้องการกู้เงินจำนวน 300,000 บาท จาก สอ.วด. และผ่อนชำระจำนวน 48 งวด โดยที่คิดดอกเบี้ยเงินกู้ในอัตราร้อยละ 7.75 บาทต่อปี ดังนั้นแต่ละงวดจะต้องผ่อนชำระเป็นเงินเท่าไร

วิธีทำ จากสมการที่ (10) $P = \frac{L_0 I(1+I)^n}{(1+I)^n - 1}$ และ $L_0 = 300{,}000$ บาท,

$$1+I = 1+\frac{7.75}{100\times 12} = 1.00646$$

$\therefore$ แต่ละงวดจะต้องผ่อนเป็นเงิน $P = \frac{300{,}000(0.00646)(1.00646)^{48}}{(1.00646)^{48}-1} = 7{,}288.72$ บาท

และจะเสียดอกเบี้ยทั้งหมด = $nP - L_0 = 48(7{,}288.72) - 300{,}000 = 49{,}858.68$ บาท

สมมติว่า เมื่อผ่อนชำระไปแล้ว 9 งวดอยากทราบว่าในงวดที่ 10 มีเงินต้นคงเหลือเท่าไร สามารถคำนวณจากสมการที่ (12) ดังนี้

$$L_{10-1} = \frac{(1+I)^{10-1}[IL_0 - P] + P}{I}$$

$$L_{10-1} = \frac{(1.00646)^9[(0.00646)300{,}000 - 7{,}288.72] + 7{,}288.72}{.00646} = 250{,}575.91 \text{ บาท}$$

ถ้าหากในงวดที่ 10 ต้องการจ่ายเงินเพิ่มอีก 100,000 บาท เพื่อลดเงินต้นให้เหลือ $L_0' = 150{,}575.91$ บาท แล้วผ่อนต่อ ดังนั้นจำนวนงวดค้างชำระจะลดลงจาก 39 งวดเหลือ

$$n = \frac{\log\left(\frac{P}{P - L_0' I}\right)}{\log(1+I)} = \frac{\log\left(\frac{7{,}288.72}{7{,}288.72 - (150{,}580.22)0.00646}\right)}{\log(1.00646)}$$

$$n = 22.24 \approx 23 \text{ งวด}$$

ในกรณีนี้งวดสุดท้ายคืองวดที่ 23 จะผ่อนชำระในจำนวนที่น้อยกว่า P แน่นอน ซึ่งจะเรียกว่าเป็น P' และสามารถคำนวณได้โดยการนำสมการที่ (9) มาคำนวณหาเงินต้นสะสมจากการผ่อน $n-1 = 22$ งวด แล้วมาหักออกจาก เงินต้นคงเหลือในงวดที่ 10 จากนั้นจึงบวกด้วยดอกเบี้ยในงวดสุดท้ายของเงินจำนวนนี้

เงินต้นอันเกิดจากการผ่อน 22 งวด

$$L_{0\,(n=22)} = P\left[\frac{(1+I)^{22}-1}{I(1+I)^{22}}\right] = 7{,}288.72\left[\frac{(1.00646)^{22}-1}{.00646(1.00646)^{22}}\right] = 149{,}030.89 \text{ บาท}$$

ดังนั้นเงินต้นคงเหลือในงวดสุดท้าย = 150,575.91 – 149,030.89 = 1,545.02 บาท

∴ เงินผ่อนชำระในงวดที่ 23 $P' = (1{,}545.02 + 0.00646(1{,}545.02)) = 1{,}555.00$ บาท

สรุปสูตรและการใช้งาน

ในการคำนวณของการผ่อนชำระเงินแบบ ลดเงินต้น ลดดอกเบี้ย ลงทุกงวดที่ผ่อนชำระนั้น มีสูตรที่นำไปใช้ได้อยู่ ๔ สมการดังนี้

๑. เงินผ่อนชำระต่อเดือน $\boxed{P = \frac{L_0 I(1+I)^n}{(1+I)^n - 1}}$

๒. ดอกเบี้ยทั้งหมด $\boxed{\textit{ดอกเบี้ยรวม} = nP - L_0}$

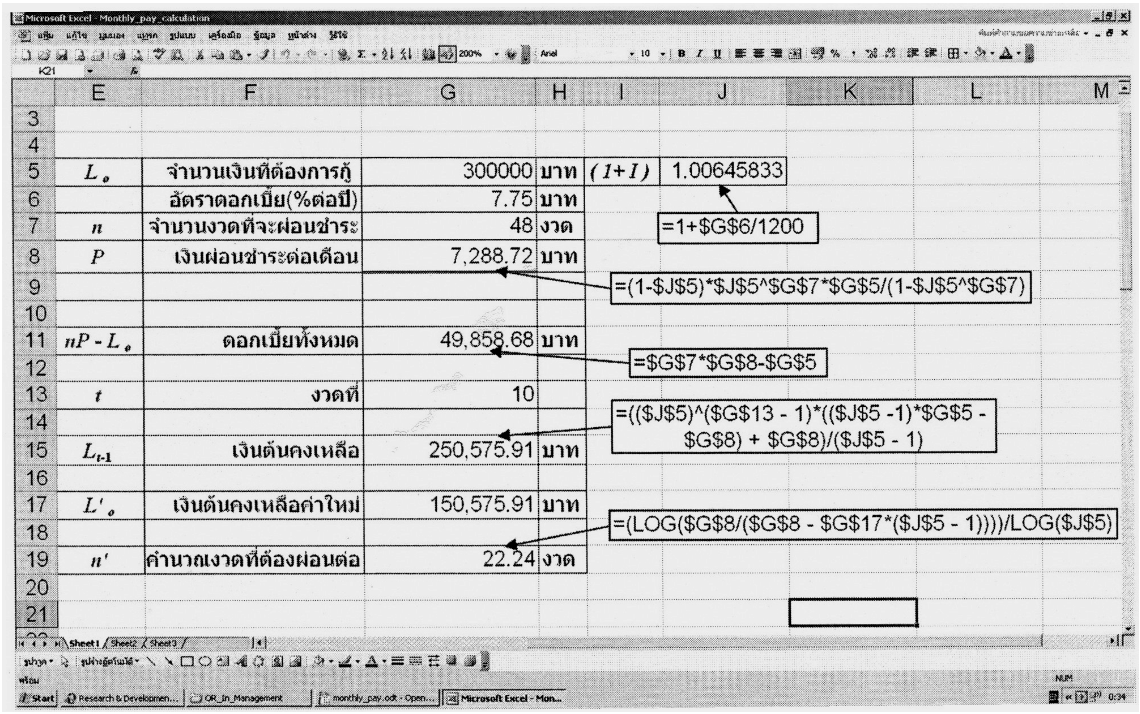
๓. เงินต้นคงเหลือ ณ งวดที่ t $\boxed{L_{t-1} = \frac{(1+I)^{t-1}[IL_0 - P] + P}{I}}$

๔. หางวดค้างชำระที่เหลือน้อยลง $\boxed{n = \frac{\log\left(\frac{P}{P - L_0 I}\right)}{\log(1+I)}}$ โดยแทนค่า L_0 ในสมการ ด้วย L_0' คือเงินต้นคงเหลือค่าใหม่ หลังจากที่ได้จ่ายเงินเพิ่มเพื่อไปลดเงินต้น แล้วผ่อนต่อ สำหรับ n ที่คำนวณได้นั้น ถ้ามีค่าเศษทศนิยมให้ปัดขึ้นเป็นจำนวนเต็มค่าถัดไป

โดยที่ คำอธิบายของตัวแปรที่ปรากฏมีดังนี้

- P = เงินผ่อนชำระต่อเดือน
- n = จำนวนเดือนหรืองวดของการผ่อนชำระ
- I = สัมประสิทธิ์อัตราดอกเบี้ยต่อเดือน = $\frac{\textit{อัตราดอกเบี้ยร้อยละต่อปี}}{100 \times 12}$
- L_0 = เงินกู้ หรือเงินต้น
- L_{t-1} = เงินต้นคงเหลือในเดือนที่ t

สำหรับท่านที่มีเครื่องคิดเลขที่เป็นแบบพื้นฐานทั่วไป ไม่สามารถคำนวณหาค่าของ เลขยกกำลัง และ ค่า log ได้ ผู้เขียนขอแนะนำให้ใช้ประโยชน์จาก โปรแกรม Microsoft Excel ซึ่งมีการติดตั้งอยู่ในเครื่องคอมพิวเตอร์แทบทุกเครื่อง และสามารถคำนวณสูตรข้างต้นได้ตามต้องการ โดยป้อนสูตร และค่าต่าง ๆ ลงในช่องของตารางดังแสดงในภาพตัวอย่าง ข้างล่างนี้



	E	F	G	H	I	J
3						
4						
5	L_o	จำนวนเงินที่ต้องการกู้	300000	บาท	$(1+I)$	1.00645833
6		อัตราดอกเบี้ย(%ต่อปี)	7.75	บาท		
7	n	จำนวนงวดที่จะผ่อนชำระ	48	งวด		
8	P	เงินผ่อนชำระต่อเดือน	7,288.72	บาท		
9						
10						
11	$nP - L_o$	ดอกเบี้ยทั้งหมด	49,858.68	บาท		
12						
13	t	งวดที่	10			
14						
15	L_{t-1}	เงินต้นคงเหลือ	250,575.91	บาท		
16						
17	L'_o	เงินต้นคงเหลือค่าใหม่	150,575.91	บาท		
18						
19	n'	คำนวณงวดที่ต้องผ่อนต่อ	22.24	งวด		
20						
21						

จากตาราง จะมีช่องที่ต้องป้อนสูตรเข้าไปอยู่ 5 ช่อง ได้แก่ 5J, 8G, 11G, 15G และ 19G การป้อนให้พิมพ์สูตรตามที่ระบุไว้ในกรอบที่มีลูกศรกำกับ ช่องที่เหลือคือ 5G, 6G, 7G, 13G และ 17G ใช้ป้อนค่าตัวเลขตามที่ระบุไว้ในคอลัมน์ F ทางซ้าย หลังจากที่ป้อนข้อมูล หรือสูตรในแต่ละช่องเสร็จแล้วให้กดปุ่ม Enter ที่แป้นพิมพ์เพื่อออกจากช่องนั้น และให้โปรแกรมรับทราบ เมื่อทำถูกต้องแล้ว ผลลัพธ์จะปรากฏขึ้นดังรูป และท่านสามารถเลือกเปลี่ยนค่าในช่องที่ไม่ใช่สูตร เช่น จำนวนเงินที่จะกู้ อัตราดอกเบี้ย หรือจำนวนงวดที่ต้องการผ่อนได้ โปรแกรมก็จะคำนวณผลลัพธ์ใหม่ให้ทันทีที่ท่านป้อนเสร็จและกดปุ่ม Enter