Maxwell's Equation
ตอนที่ ๑

น.ท. ศักดา นฤนิรนาท
อาจารย์ ฝ่ายศึกษา โรงเรียนนายเรือ

สาเหตุที่ตัดสินใจเขียนเรื่องนี้ เพราะเมื่อสมัยผู้เขียนเริ่มเรียนวิชาวิศวกรรมแม่เหล็กไฟฟ้า โดยเฉพาะหัวข้อนี้ สมการของแม็กซ์เวลล์ ซึ่งเป็นหัวใจของการต่อยอดในวิชาอื่น ๆ ของสาขาวิศวกรรมไฟฟ้า เช่น วิศวกรรมสายอากาศ การแพร่กระจายคลื่นวิทยุ แล้วบอกได้คำเดียวว่า “มึน” แต่ก็ไม่ละความพยายาม จนกระทั่งจบปริญญาตรี ก็ยังไม่เข้าใจหัวข้อนี้อยู่ดี สาเหตุเพราะเครื่องหมายต่าง ๆ ที่ปรากฏอยู่ในสมการ นี้ ดูแล้วชวนให้เวียนศีรษะแล้วเกิดอาการเมาคลื่นได้ง่าย ๆ แต่ผู้เขียนก็ยังไม่ยอมแพ้ ถึงกับเอาเวลาว่างมานั่งขบคิด และหาหนังสืออ่านเพิ่มเติม โชคร้ายตรงที่หัวข้อนี้มักจะเป็นเพียงแค่บทหรือหัวข้อย่อยในหนังสือเท่านั้น ไม่ได้อธิบายละเอียดมาก เนื่องจากมันมีพื้นฐานมาจากวิชาพื้นฐานอื่น ๆ และแคลคูลัส ดังนั้น สมการแม็กซ์เวลล์นี้จึงเหมือนกับเป็น application ของวิชาในวิศวกรรมไฟฟ้าแล้ว การที่จะเข้าใจสมการนี้ได้ถ่องแท้ พื้นฐานจะต้องแน่นปึ๊กพอสมควร จนวันหนึ่งผู้เขียนได้พบกับศาสตราจารย์ทางฟิสิกส์ ซึ่งท่านเชี่ยวชาญในเรื่องนี้อย่างดีเยี่ยม ท่านได้กรุณาอธิบายพร้อมทั้งได้แนะนำหนังสือที่เจาะตรงประเด็นให้อ่าน ก็ยังใช้เวลาพอสมควรในการทำความเข้าใจ ผู้เขียนจึงอยากที่จะเขียนบทความนี้ให้นักเรียนนายเรือหรือผู้สนใจได้อ่าน เพื่อที่จะเป็นทางลัดให้ผู้อ่าน ได้เข้าใจหัวข้อนี้ง่ายขึ้น โดยเฉพาะนักเรียนนายเรือชั้นปีที่ ๓ ที่กำลังเริ่มต้นมึนกับวิชาต่าง ๆ ในกองวิชาวิศวกรรมศาสตร์ และจะต้องนำสมการนี้ไปใช้ต่อในวิชาชั้นปีที่ ๔ ด้วยแล้วแทนที่จะต้องเสียเวลาไปอ่านตำราหลาย ๆ เล่มเพื่อให้เข้าใจในเรื่องเดียว อย่างที่ผู้เขียนเคยทำมา ผู้เขียนได้พยายามใช้ภาษาเขียนง่าย แต่ไม่ถึงกับเป็นภาษาพูด (เพราะเกรงจะถูกตำหนิว่า โตจนป่านนี้ยังใช้ภาษาเขียนไม่เป็นอีก) และอธิบายไปทีละขั้นตอนในแต่ละสมการ ซึ่งถ้าผู้อ่านได้ลองอ่านและพยายามทำความเข้าใจในแต่ละขั้นตอน และอย่าเพิ่งตื่นกลัวกับตัวสัญลักษณ์แล้ว เชื่อแน่ว่าจะเข้าใจ สมการแม็กซ์เวลล์ได้ดียิ่งขึ้น

สมการแม็กซ์เวลล์ เกี่ยวข้องกับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าอย่างไร ?

คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า (Electromagnetic wave) ชื่อก็บอกความหมายอยู่ในตัวแล้วว่าต้องมีอะไรที่เกี่ยวกับไฟฟ้า (Electro) และแม่เหล็ก (Magnet) ซึ่งพูดให้ง่าย ๆ ก็คือเมื่อเวลาผ่านไปแล้วสนามไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงความแรงของมัน จะก่อให้เกิดสนามแม่เหล็กขึ้น ยิ่งสนามไฟฟ้าแรงเท่าไหร่สนามแม่เหล็กจะยิ่ง

คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเกิดการเหนี่ยวนำของ "สนามไฟฟ้า" และ "สนามแม่เหล็ก" ที่เปลี่ยนแปลงไปเรื่อย ๆ ตามเวลา

จะยิ่งแรงตามเท่านั้นแล้วสนามแม่เหล็กนี้ก็จะก่อให้เกิดสนามไฟฟ้าอีก และเกิดแบบนี้ไปเรื่อยๆ สลับกันไปมา ในทางฟิสิกส์มีสมการหลักๆ อยู่สี่สมการ ที่ใช้อธิบายพฤติกรรมของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้านี้ เรียกว่า สมการแม็กซ์เวลล์ (Maxwell's Equations) ซึ่งเป็นสมการที่ประกอบด้วยคณิตศาสตร์ชั้นสูง คงจะอธิบายให้เข้าใจภายในบทความเดียวไม่ได้ ผู้อ่านคงจะต้องติดตามอ่านไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะจบเนื้อหา แต่สรุปใจความของสมการได้ดังนี้[๑]

๑. กฎของเกาส์ในสนามไฟฟ้า : ประจุไฟฟ้าสามารถมีขั้วเดียวโดด ๆ ได้ สนามไฟฟ้าเกิดจากประจุ

๒. กฎของเกาส์ในสนามแม่เหล็ก : ไม่มีประจุแม่เหล็กขั้วเดียว (แม่เหล็กต้องมีสองขั้วเสมอ คือ บวกกับลบ)

๓. กฎของฟาราเดย์ : การหมุนวนของสนามไฟฟ้าก่อให้เกิดสนามแม่เหล็ก

๔. กฎของแอมแปร์ (ถูกแก้ไขเพิ่มเติมโดยแม็กซ์เวลล์) : การหมุนวนของสนามแม่เหล็กก่อให้เกิดสนามไฟฟ้า

ในความเป็นจริงแล้ว แม็กซ์เวลล์ไม่ได้ค้นพบสมการทั้งสี่โดยตรง แต่เขาทำนายไว้ว่า คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ามีอยู่จริง ๆ (สมัยนั้นยังไม่มีมือถือใช้) แล้วต่อมาก็มีนักวิทยาศาสตร์หลายท่านพิสูจน์ว่า คำทำนายของแมกซ์เวลล์เป็นจริง และจากการแก้สมการแม็กซ์เวลล์จะพบ ค่าคงตัวค่าหนึ่งคือ ความเร็วแสง (c) ซึ่งมีความสัมพันธ์กับ “สภาพความยอมทางไฟฟ้า (Permittivity)” กับ “สภาพซึมซับได้ทางแม่เหล็ก (Permeability)” ดังนี้

c = 1/√ (ผลคูณของ "สภาพความยอมทางไฟฟ้า" กับ "สภาพซึมซับได้ทางแม่เหล็ก")

ซึ่งคำตอบของมันเท่ากับ ๒๙๙,๗๙๒,๔๕๘ เมตรต่อวินาที กับจุดทศนิยมอีกหน่อย สำหรับค่า “สภาพความยอมทางไฟฟ้า” กับ “สภาพซึมซับได้ทางแม่เหล็ก” ที่เอามาคำนวณนั้นเป็นค่าในสุญญากาศ เพราะฉะนั้นถ้าหากแสงวิ่งผ่านตัวกลางอื่นๆ ค่าพวกนี้จะไม่เท่ากัน ทำให้ความเร็วของแสงในแต่ละตัวกลางไม่เท่ากันนั่นเอง

พอจะมองเห็นคร่าว ๆ แล้วว่า ทำไม นักเรียนนายเรือควรต้องเข้าใจสมการแม็กซ์เวลล์นี้ให้ดี ถึงแม้จะจำสูตรไม่ได้ แต่อย่างน้อย ควรเข้าใจว่า สิ่งต่าง ๆ ที่ปรากฏในสมการนั้นสัมพันธ์กันอย่างไร และทำงานอย่างไร เพราะเมื่อขึ้นไปศึกษาชั้นปีที่ ๔ แล้ว จะต้องเจอะเจอกับสมการเหล่านี้อีก ไม่ว่าจะเป็นวิชา โครงข่ายระบบสื่อสารและสายส่ง การแพร่กระจายคลื่นวิทยุ และวิศวกรรมสายอากาศ ก็ต้องอาศัยสมการนี้เป็นตัวตั้งต้นทั้งสิ้น

---
[๑] http://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell's_equations

๑. Gauss's law for electric fields

ในสมการ Maxwell สมการแรกนั้นจะเกี่ยวข้องกับสนามไฟฟ้า โดยจะมีสนามไฟฟ้าอยู่ ๒ ประเภท คือ สนามไฟฟ้าสถิตซึ่งเกิดจากประจุไฟฟ้า และสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำซึ่งเกิดจากการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็ก ในกฎของเกาส์สำหรับสนามไฟฟ้า จะเกี่ยวข้องกับสนามไฟฟ้าสถิต และเราจะพบว่า กฎนี้เป็นเครื่องมือที่มีความสามารถสูงมาก เพราะว่ามันสามารถอธิบายให้เห็นถึงคุณลักษณะเฉพาะ ที่เกี่ยวข้องกับพฤติกรรมของสนามไฟฟ้าสถิตในเชิงระยะทาง ที่เกิดจากการกระจายตัวของประจุไฟฟ้าได้ กฎของเกาส์สามารถที่จะแสดงให้อยู่ในรูปแบบต่าง ๆ กันได้ แต่ในที่นี้ เราสามารถที่จะแสดงให้อยู่ในรูป อินทิกรัล (Integral) และ ดิฟเฟอร์เรนเชียล (Differential)

๑.๑ กฎของเกาส์ในรูปของอินทิกรัล

กฎของเกาส์ของสนามไฟฟ้า ในรูปของอินทิกรัล แสดงได้โดย

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \circ \hat{n}\,da = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_o}}$$

ฝั่งด้านซ้ายของสมการข้างต้น เป็นการอธิบายในเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับ ฟลักซ์ไฟฟ้า(Electric flux)[๒] นั่นคือ **จำนวนของเส้นสนามไฟฟ้า** ที่ผ่านพื้นผิวปิด S ในขณะที่ด้านขวาของสมการ คือ **จำนวนประจุ** ที่อยู่ภายในพื้นผิวนั้น หารด้วยค่าคงที่ ที่เรียกว่า Permittivity of Free Space ดังนั้น เราต้องทำความเข้าใจนิยามขั้นต้นก่อนว่า กฎของเกาส์ นั้นคืออะไร

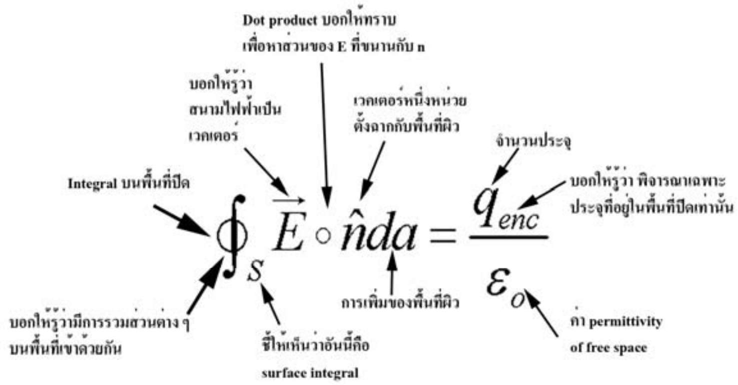
ถ้าสนามไฟฟ้าที่มีอยู่ในพื้นผิวปิดใด ๆ ก็ตามเกิดจาก ประจุไฟฟ้า แล้ว ดังนั้น ฟลักซ์ของสนามไฟฟ้า ที่วิ่งผ่านพื้นผิวปิดนั้น จะแปรตามกับจำนวนของประจุ ที่มีอยู่ในพื้นที่นั้น ๆ

หรือในอีกนัยหนึ่ง เรากล่าวได้ว่า ถ้าเรามีพื้นผิวปิดใด ๆ ที่ไม่มีประจุอยู่เลย ฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านพื้นผิวนั้น มีค่าเท่ากับศูนย์ แต่ถ้าเราหยอดประจุบวกลงไปในพื้นผิวปิดนั้น ฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านพื้นผิวปิดมีค่าเป็นบวก หลังจากนั้นถ้าเราหยอดประจุลบ ที่มีจำนวนเท่ากับประจุบวกลงไปในพื้นผิวเดิม จะทำให้ประจุรวมภายในทั้งหมดมีค่าเป็นศูนย์ ฟลักซ์ไฟฟ้ารวมก็จะมีค่าเท่ากับศูนย์เช่นกัน จำไว้ว่า ผลรวมของประจุที่พูดถึงในกฎของเกาส์นี้ เราพิจารณาเพียงแค่ประจุสุทธิภายในพื้นผิวปิดที่เราสนใจเท่านั้น

---

[๒] ฟลักซ์ (flux) คือ อัตราของปริมาณ(มวล จำนวนอนุภาค จำนวนเส้นที่แทนปริมาณ ฯลฯ)ที่ผ่านผิวหนึ่ง เช่น น้ำที่ไหลไปตามท่อ ก็สามารถพิจารณาได้ว่า ฟลักซ์ของน้ำ คือ อัตราที่ปริมาณหรือมวลของน้ำซึ่งไหลผ่านพื้นที่ภาคตัดขวางของท่อ เป็นต้น ดังนั้น ฟลักซ์ไฟฟ้า คือ จำนวนเส้นสนามไฟฟ้าที่ผ่านผิวผิวหนึ่ง นั่นเอง

เพื่อให้เข้าใจความหมายของสัญลักษณ์ แต่ละตัวในสมการของ ***กฎของเกาส์ของสนามไฟฟ้า*** ง่ายขึ้นเรามาพิจารณาตามแผนภาพข้างล่างนี้



กฎของเกาส์ มีประโยชน์อย่างไร ? เราสามารถใช้กฎนี้ ในการแก้ปัญหาในวิศวกรรมแม่เหล็กไฟฟ้าได้ ๒ ประเภทใหญ่ ๆ คือ

๑. เมื่อกำหนดข้อมูลเกี่ยวกับ การกระจายของประจุไฟฟ้ามาให้ เราสามารถหา ฟลักซ์ไฟฟ้าที่พุ่งผ่าน พื้นผิวปิดที่ล้อมรอบประจุเหล่านั้น

๒. เมื่อกำหนดข้อมูลเกี่ยวกับ ฟลักซ์ไฟฟ้าที่พุ่งผ่านพื้นผิวปิด เราสามารถหา จำนวนประจุทั้งหมด ที่มีอยู่ในพื้นผิวปิด

โปรดสังเกตว่า เมื่อกำหนดพื้นผิวปิดใด ๆ มาให้ สิ่งที่เราต้องการคำนวณหาโดยกฎนี้ มีอยู่ ๒ อย่างคือ **ฟลักซ์ไฟฟ้าที่พุ่งผ่าน** พื้นผิวปิด และ **จำนวนประจุทั้งหมด** ที่มีอยู่ในพื้นผิวปิดนั้น ถึงแม้ว่ากฎของเกาส์ในรูปของอินทิกรัลจะดูค่อนข้างซับซ้อน แต่ถ้าเรามาลองไล่พิจารณา สัญลักษณ์ทีละตัวแล้ว เราก็อาจจะเข้าใจว่ากฎของเกาส์นั้นเป็นอย่างไรได้ง่ายขึ้น โดยเริ่มจากสนามไฟฟ้า

$\boxed{\overrightarrow{E}}$ สนามไฟฟ้า

เพื่อให้เข้าใจ กฎของเกาส์ได้ดีขึ้น สิ่งแรกที่เราจะต้องทำความเข้าใจก่อนก็คือ นิยามของสนามไฟฟ้า ในหนังสือเรียนฟิสิกส์และวิศวกรรมไฟฟ้าโดยทั่วไปแล้ว คงกล่าวไว้เพียงว่า สนามไฟฟ้านั้นมีอยู่ในพื้นที่ทั่ว ๆ ไปที่มีแรงกระทำทางไฟฟ้าเกิดขึ้น ซึ่งในอดีต Michael Faraday ให้คำนิยามสนามไฟฟ้าก็คือ "สนามของแรงทางไฟฟ้า" ส่วน James Clerk Maxwell ก็กล่าวไว้ว่ามันคือ "พื้นที่ว่างรอบ ๆ ที่มีแรงทางไฟฟ้ากระทำอยู่" อย่างไรก็ตาม ในการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมไฟฟ้า เรากำหนดให้สนามไฟฟ้า ณ ตำแหน่งใด ๆ คือ ปริมาณของแรง (ในหน่วยนิวตัน) ที่กระทำต่อประจุในแต่ละคูลอมบ์ ณ ตำแหน่งนั้น ๆ ดังนั้น สนามไฟฟ้าสามารถแสดงให้อยู่ในรูปของสมการโดยทั่วไปได้โดย

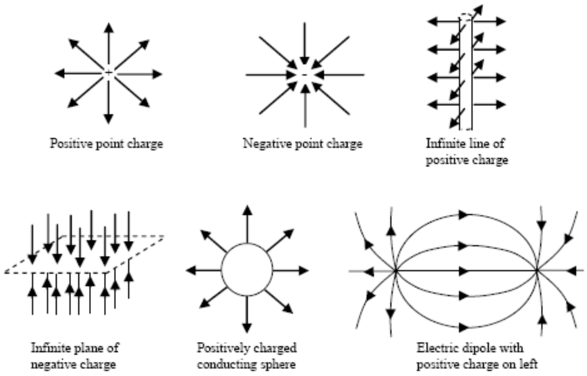
$$\overrightarrow{E} \equiv \frac{\overrightarrow{F_e}}{q_o} \tag{๑.๑}$$

โดยที่ $\overrightarrow{F_e}$ คือ แรงทางไฟฟ้าบนประจุเล็ก ๆ q_o สมการข้างต้นนี้แสดงให้เห็นถึงความสำคัญของคุณลักษณะของสนามไฟฟ้าได้อย่างชัดเจนอยู่ ๒ ประการคือ

๑) $\vec{E}$ เป็นปริมาณทางเวคเตอร์ ที่ประกอบด้วย ขนาดที่แปรผันตามแรง และทิศทางที่เป็นไปตามแรงบนประจุบวกที่ทดสอบ

๒) $\vec{E}$ มีหน่วยเป็น นิวตันต่อคูลอมบ์ (N/C) ซึ่งเป็นหน่วยเดียวกันกับ โวลต์ต่อเมตร (V/m) โดยที่ โวลต์=นิวตันxเมตร/คูลอมบ์

ประโยชน์ของกฎของเกาส์นั้น มันจะช่วยทำให้เราเห็นภาพของสนามไฟฟ้าในบริเวณพื้นที่ที่มีวัตถุที่ถูกประจุอยู่ ซึ่งเราทำได้โดยการสร้างภาพของสนามไฟฟ้าด้วยรูปลูกศรหรือเส้นของสนามไฟฟ้าที่ชี้ไปยังทิศทางของสนามไฟฟ้าในแต่ละจุดบนที่ว่างที่เรากำลังศึกษา ถ้าเราใช้รูปลูกศร เราใช้ความยาวของลูกศรแทนความเข้มของสนามไฟฟ้า แต่ถ้าเราใช้เส้นของสนามไฟฟ้า เราใช้ระยะห่างระหว่างเส้น ของสนามไฟฟ้าแทนความเข้มของสนามไฟฟ้า (ยิ่งเส้นสนามไฟฟ้าใกล้กันมากเท่าไร ความเข้มของสนามไฟฟ้าก็มากขึ้นเท่านั้น) แต่เราต้องไม่ลืมว่าภาพร่างของสนามไฟฟ้านั้น ช่องว่างระหว่างเส้นของสนามไฟฟ้า หรือลูกศรก็มีสนามไฟฟ้าอยู่ด้วยเสมอ ตัวอย่างของสนามไฟฟ้าที่เกี่ยวข้องกับ กฎของเกาส์แสดงในรูปที่ ๑.๑



รูปที่ ๑.๑ ตัวอย่างของสนามไฟฟ้า

กฎทองที่ช่วยให้เราเห็นภาพของสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุได้ ดังนี้

- เส้นของสนามไฟฟ้า จะต้องมีจุดเริ่มต้นบนประจุบวก และสิ้นสุดบนประจุลบ
- สนามไฟฟ้าสุทธิที่จุดใด ๆ ก็ตาม ก็คือผลรวมของเวคเตอร์ของสนามไฟฟ้าทั้งหมดที่ปรากฏอยู่บนจุดนั้น
- เส้นของสนามไฟฟ้าไม่สามารถข้ามกันได้ นั่นคือที่จุดเดียวกันนั้น สนามไฟฟ้าจะต้องชี้ไปยังทิศทางที่ต่างกัน
- เส้นของสนามไฟฟ้าจะตั้งฉากกับพื้นผิวของตัวนำในสภาวะสมดุลเสมอ

$\boxed{\circ}$ dot product (ผลคูณจุด หรือ ผลคูณเชิงสเกลาร์[๓])

เมื่อเราต้องเข้าไปเกี่ยวข้องกับสมการที่ประกอบด้วยสัญลักษณ์การคูณ ไม่ว่าจะเป็นจุดวงกลมหรือกากบาท เราควรจะต้องตรวจดูตัวแปรทั้งสองข้างของสัญลักษณ์นั้น ถ้าเป็นตัวพิมพ์เข้มหรือสวมหมวกเวคเตอร์ด้วยแล้ว (เช่นใน กฎของเกาส์ก็จะเป็น $\vec{E}$ และ $\hat{n}$) สมการนั้นก็จะเกี่ยวข้องกับการคูณกันของเวคเตอร์ ซึ่งจะมีหลายวิธีด้วยกัน

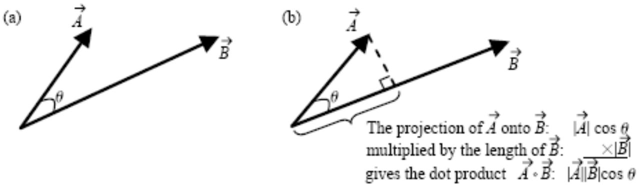
ในกฎของเกาส์นั้น ตัววงกลมระหว่าง $\vec{E}$ และ $\hat{n}$ แสดงถึงผลคูณจุดระหว่างสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ และเวคเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย $\hat{n}$ ถ้าเรารู้องค์ประกอบของเวคเตอร์ในระนาบ Cartesian เราสามารถคำนวณผลคูณเวคเตอร์ได้โดย

$$\vec{A} \circ \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad (๑.๒)$$

หรือ ถ้ารู้มุม θ ระหว่างเวคเตอร์สองตัว เราสามารถคำนวณได้โดย

$$\vec{A} \circ \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \qquad (๑.๓)$$

โดยที่ $|\vec{A}|$ และ $|\vec{B}|$ คือขนาด(ความยาว) ของเวคเตอร์ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นค่า สเกลาร์ (คือมีเพียงแค่ขนาดแต่ไม่มีทิศทาง) เพื่อที่จะเข้าใจถึงนัยทางกายภาพของผลคูณจุด ให้เรามาลองพิจารณาเวคเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ที่มีทิศทางต่างกันและทำมุม θ ดังแสดงในรูปที่ ๑.๒(a)



รูปที่ ๑.๒ ความหมายของ dot product

เราจะเห็นว่าถ้าเราฉายภาพเวคเตอร์ $\vec{A}$ ไปบน $\vec{B}$ ภาพที่ได้คือ $|\vec{A}|\cos\theta$ ดังแสดงในรูปที่ ๑.๒(b) เมื่อเรานำไปคูณกับความยาวของเวคเตอร์ $\vec{B}$ เราจะได้ $|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$ ดังนั้น dot product ของ $\vec{A} \circ \vec{B}$ ก็คือภาพฉายของเวคเตอร์ $\vec{A}$ ไปบนทิศทางของเวคเตอร์ $\vec{B}$ คูณด้วยความยาวของเวคเตอร์ $\vec{B}$[๔] ประโยชน์จาก dot product ของกฎของเกาส์จะชัดเจนยิ่งขึ้น เมื่อเราเข้าใจถึงความหมายของเวคเตอร์ $\hat{n}$

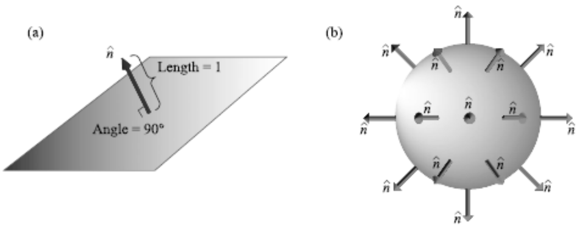
$\boxed{\hat{n}}$ unit normal vector (เวคเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย)

[๓] ในทางคณิตศาสตร์ ผลคูณจุด หรือ ผลคูณเชิงสเกลาร์ คือการดำเนินการทวิภาคบนเวกเตอร์สองอัน ซึ่งให้ผลลัพธ์เป็นปริมาณสเกลาร์ที่เป็นจำนวนจริง ต่างกับผลคูณไขว้ซึ่งให้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์อีกอันหนึ่ง http://th.wikipedia.org/wiki/ผลคูณจุด

[๔] เราสามารถทำกลับกันโดยการฉายภาพเวคเตอร์ $\vec{B}$ ไปบน $\vec{A}$ และได้ผลลัพธ์เหมือนกัน

เวคเตอร์ที่มีความยาวหนึ่งหน่วย ที่ชี้ไปในทิศทางตั้งฉากกับพื้นผิวใด ๆ เราเรียกว่า Unit Normal Vector ดังแสดงในรูปที่ ๑.๓(a) และแน่นอน เราสามารถที่จะกำหนดทิศทาง ของเวคเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยนี้ ให้อยู่ในทิศทางตรงกันข้ามได้ เพราะไม่มีกฎตายตัวใด ๆ ในการเลือกเวคเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยนี้ แต่สำหรับพื้นผิวปิดแล้ว (ตามคำนิยามแล้ว คือ พื้นผิวที่แบ่งพื้นที่ว่างออกเป็น “ภายใน” และ “ภายนอก”) เรามักจะกำหนดให้ทิศทางของเวคเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย มีทิศพุ่งออกจากพื้นผิวที่ปกคลุมปริมาตรจำนวนหนึ่งไว้ ดังเช่น เวคเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย ของทรงกลมที่แสดงในรูปที่ ๑.๓(b)

ในตำราบางเล่ม อาจกำหนดรูปแบบเวคเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยเป็น $d\vec{a}$ แทนที่จะเป็น $\hat{n}da$ ซึ่งที่จริงแล้ว เวคเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย นั้นแทรกอยู่ในเวคเตอร์ของพื้นที่นั้นแล้ว นั่นคือมีขนาดเท่ากับพื้นที่ da และเวคเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยของพื้นที่ นั้นอยู่ในทิศ $\hat{n}$ นั่นเอง



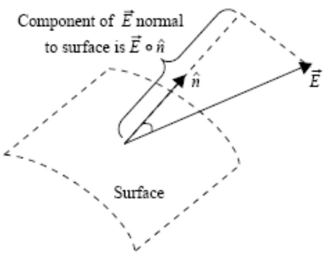
รูปที่ ๑.๓ เวคเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยสำหรับพื้นผิวระนาบและพื้นผิวทรงกลม

$\boxed{\vec{E}\circ\hat{n}}$ ส่วนประกอบของ $\vec{E}$ ที่ตั้งฉากกับพื้นผิว

ถ้าเราเข้าใจความหมายของผลคูณจุดและเวคเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยแล้ว เราก็น่าจะเข้าใจมากขึ้นว่า $\vec{E}\circ\hat{n}$ ก็คือส่วนประกอบของเวคเตอร์สนามไฟฟ้า ที่ตั้งฉากอยู่กับพื้นผิวที่เรากำลังศึกษาอยู่ ยังจำได้หรือไม่ว่า ผลคูณจุดระหว่างเวคเตอร์สองตัว เช่น $\vec{E}$ และ $\hat{n}$ นั้นก็คือการฉายภาพของเวคเตอร์ตัวแรกไปยังเวคเตอร์ตัวที่สอง แล้วคูณด้วยความยาวหรือขนาดของเวคเตอร์ตัวที่สองนั่นเอง ดังนั้น

$$\vec{E}\circ\hat{n}=\left|\vec{E}\right|\left|\hat{n}\right|\cos\theta=\left|\vec{E}\right|\cos\theta \qquad (๑.๔)$$

โดยที่ θ คือมุมระหว่าง $\vec{E}$ และ $\hat{n}$ และ เวคเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย นั้นมีขนาดหรือความยาวเท่ากับ ๑และผลที่ได้ก็คือส่วนประกอบของเวคเตอร์สนามไฟฟ้า ที่ตั้งฉากกับพื้นผิวดังแสดงในรูปที่ ๑.๔



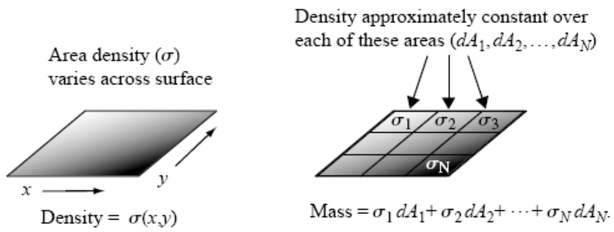
รูปที่ ๑.๔ การฉายภาพของ $\vec{E}$ ไปยังทิศทางของ $\hat{n}$

- ในกรณีที่ $\theta = 90^o$ แล้ว $\vec{E}$ จะตั้งฉากกับ $\hat{n}$ นั่นหมายถึงสนามไฟฟ้านั้นขนานกับพื้นผิว และ $\vec{E} \circ \hat{n} = \left|\vec{E}\right| \cos 90^o = 0$ แสดงว่าในกรณีนี้ ส่วนประกอบของ $\vec{E}$ ที่ตั้งฉากกับผิวมีคาเท่ากับ 0
- ในกรณีที่ $\theta = 0^o$ แล้ว $\vec{E}$ จะขนานกับ $\hat{n}$ นั่นหมายถึงสนามไฟฟ้านั้นตั้งฉากกับพื้นผิว และ $\vec{E} \circ \hat{n} = \left|\vec{E}\right| \cos 0^o = \left|\vec{E}\right|$ แสดงว่าในกรณีนี้ ส่วนประกอบของ $\vec{E}$ ที่ตั้งฉากกับพื้นผิวมีค่าเท่ากับความยาวของ $\vec{E}$

ความสำคัญของหัวข้อนี้ จะทำให้เราเข้าใจความหมายของฟลักซ์ไฟฟ้ามากขึ้น แต่ก่อนอื่นเราควรจะเข้าใจความหมายของอินทิกรัลพื้นผิว ในกฎของเกาส์เสียก่อน

$\boxed{\int_S ()da}$ surface integral (อินทิกรัลพื้นผิว)

กฎของเกาส์จะเกี่ยวข้องกับการอินทิกรัลของฟังก์ชั่นสเกลาร์ หรือสนามเวคเตอร์บนพื้นผิวซึ่งเรารียกว่า อินทิกรัลพื้นผิว เพื่อความเข้าใจความหมายของอินทิกรัลพื้นผิวนี้ ให้เราพิจารณารูปที่ ๑.๕ โดยเราสมมติว่า ความหนาแน่นพื้นผิว (มวลต่อพื้นที่หนึ่งหน่วย) แปรไปตามแกน x และ y และเราต้องการคำนวณหา มวลทั้งหมดที่มีอยู่ในพื้นที่ที่เราสนใจอยู่นี้ เราเริ่มต้นโดยการแบ่งพื้นที่ออกเป็นหน่วยย่อย ๆ ขนาดสองมิติและมีความหนาแน่นพื้นผิวคงที่



รูปที่ ๑.๕ การหามวลของพื้นผิวที่มีความหนาแน่นไม่คงที่

ถ้าเรากำหนดให้แต่ละหน่วยย่อย มีความหนาแน่น σ_i และมีพื้นที่ dA_i ฉะนั้น มวลของแต่ละหน่วยย่อยมีค่าเท่ากับ $\sigma_i dA_i$ ถ้าเราต้องการหามวลทั้งหมดของพื้นผิวซึ่งมีจำนวน N หน่วยย่อย เราสามารถนำมวลในแต่ละหน่วยย่อยมารวมกันก็จะได้ $\sum_{i=1}^{N} \sigma_i dA_i$ คราวนี้เรามาลองจินตนาการต่อว่า ถ้าเราทำให้แต่ละหน่วยย่อยหดเล็กลงกว่าเดิมมากเท่าใด มวลต่อหน่วยก็จะยิ่งมีค่าใกล้เคียงกับค่าจริงมากขึ้นเท่านั้น ฉะนั้น ถ้าเรากำหนดให้พื้นที่ในแต่ละหน่วยย่อย dA หดเล็กลงจนมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ และจำนวนหน่วยย่อยมีค่ามากขึ้นจนเข้าใกล้ค่าอนันต์ (หวังว่าผู้อ่านคงจิตนาการตามได้ เพราะพื้นผิวที่เรากำหนดไว้มีพื้นที่จำกัดค่าหนึ่ง ถ้าหน่วยย่อยมีขนาดเล็กลงมากจนเกือบเข้าใกล้ศูนย์ จำนวนหน่วยย่อยก็ต้องมีจำนวนมากขึ้นจนเกือบเป็นค่าอนันต์ เพื่อให้เต็มพื้นผิวรวมนั้น) เครื่องหมาย Σ จะกลายเป็นเครื่องหมาย

$\int$ ดังนั้น

มวลพื้นผิวทั้งหมด = $\int_S \sigma(x,y)dA$

สมการนี้คือ การอินทิกรัลของสมการสเกลาร์ $\sigma(x,y)$ บนพื้นที่ S เป็นวิธีการรวมค่าการกระจายฟังก์ชันของหน่วยย่อยเล็ก ๆ ซึ่งในที่นี้คือ ความหนาแน่นพื้นผิว จากหลักการนี้จะนำไปสู่ความเข้าใจกฎของเกาส์ในรูปอินทิกรัล แต่เราจะต้องมาศึกษากันก่อนว่า การอินทิกรัลพื้นผิวของสนามเวคเตอร์ เป็นอย่างไรในหัวข้อต่อไป

$\boxed{\int_S \vec{A} \circ \hat{n} da}$ ฟลักซ์ของสนามเวคเตอร์

การอินทิกรัลพื้นผิวในกฎของเกาส์นั้น จะใช้ไม่ได้กับฟังก์ชันที่เป็นสเกลาร์ (ในที่นี้คือ ความหนาแน่นของพื้นผิว) แต่ใช้กับฟังก์ชันที่เป็นสนามเวคเตอร์ แล้วสนามเวคเตอร์คืออะไร? ถ้าว่ากันตามนิยามแล้ว สนามเวคเตอร์ก็คือการกระจายของปริมาณหนึ่ง ๆ ในพื้นที่ใด ๆ (สนาม) และปริมาณเหล่านี้มีทั้งขนาดและทิศทาง (เวคเตอร์) ยกตัวอย่างเช่น การกระจายของอุณหภูมิภายในห้องคือสนามสเกลาร์ (ปริมาณทางสเกลาร์) แต่ในขณะที่ ความเร็วและทิศทางการไหลของของเหลวที่จุดต่าง ๆ ในลำธารนั้นคือสนามเวคเตอร์

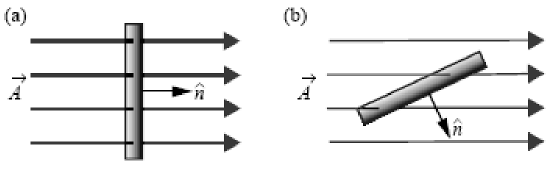
ในการเปรียบเทียบการไหลของของเหลว จะช่วยให้เราเข้าใจความหมายของฟลักซ์ของสนามเวคเตอร์ได้ดีขึ้น ถึงแม้ว่าในบางขณะสนามเวคเตอร์นี้จะอยู่นิ่งหรือไม่มีการไหลเลยก็ตาม เราสามารถจินตนาการฟลักซ์ของสนามเวคเตอร์บนพื้นที่ใด ๆ ได้กับ “ปริมาณ” ของสนามนั้น “ไหล” ผ่านพื้นที่ตัดขวางนั้น ดังแสดงในรูปที่ ๑.๖

ตัวอย่างที่ง่ายที่สุดที่จะแสดงให้เห็นถึงความหมายของ ฟลักซ์ของสนามเวคเตอร์ คือ สนามเวคเตอร์ $\vec{A}$ และพื้นผิว S ที่ตั้งฉากกับสนามเวคเตอร์นั้น และ ฟลักซ์ Φ ก็คือผลคูณของขนาดของสนามเวคเตอร์ และพื้นที่ของพื้นผิวนั้น

$$\Phi = \left|\vec{A}\right| \times \text{พื้นที่ของพื้นผิว} \qquad (๑.๕)$$

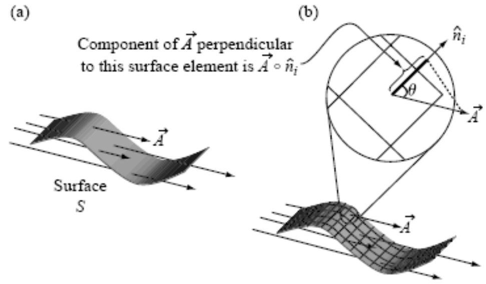
ซึ่งในกรณีนี้แสดงในรูปที่ ๑.๖(a) สังเกตว่า $\vec{A}$ นั้นตั้งฉากกับพื้นผิว และขนานกับ $\hat{n}$ แต่ถ้าสนามเวคเตอร์นั้นไม่ได้ตั้งฉากกับพื้นผิว ดังแสดงในรูปที่ 1.6(b) แล้ว เราสามารถคำนวณหาฟลักซ์ ได้โดยการหาส่วนประกอบของ $\vec{A}$ ที่ตั้งฉากกับพื้นผิวและนำไปคูณกับพื้นที่ของพื้นผิว

$$\Phi = \vec{A} \circ \hat{n} \times (\text{พื้นที่ของพื้นผิว}) \qquad (๑.๖)$$



รูปที่ ๑.๖ ฟลักซ์ของสนามเวคเตอร์ไหลผ่านพื้นผิว

จากสมการข้างต้น เรากำหนดให้สนามเวคเตอร์นั้นคงที่และพื้นผิวนั้นแบนราบ แต่ในการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมแม่เหล็กไฟฟ้านั้น พื้นผิวส่วนใหญ่จะมีลักษณะไม่ราบเรียบเสมอไป แต่จะมีส่วนโค้งด้วย อีกทั้งสนามเวคเตอร์ก็ไม่จำเป็นต้องคงที่เสมอไป กล่าวคือมีขนาดเปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งต่าง ๆ การแก้ปัญหาเหล่านี้ เราจะต้องเข้าใจเพิ่มเติมเกี่ยวกับการอินทิกรัลพื้นผิวกับสนามเวคเตอร์มากกว่านี้



รูปที่ ๑.๗ ส่วนประกอบของเวคเตอร์ $\vec{A}$ ตั้งฉากกับพื้นผิว

ประเด็นที่เราให้ความสนใจตอนนี้ คือ การคำนวณหาอัตราการไหลของของเหลว หรือจำนวนของอนุภาคที่ไหลผ่านพื้นผิวในแต่ละวินาทีเป็นเท่าใด ซึ่งประเด็นที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการหาฟลักซ์ของสนามไฟฟ้า ที่ไหลผ่านพื้นผิวใด ๆ ได้ เรามาลองจินตนาการดูว่า $\vec{A}$ เป็นของเหลวที่ไหลผ่านแผ่นเยื่อบาง ๆ S ที่มีพื้นผิวที่มีลักษณะโค้งจากรูปที่ ๑.๗(a) โดยเรากำหนดให้ $\vec{A}$ เป็นผลคูณระหว่างปริมาณสเกลาร์และเวคเตอร์ นั่นคือความหนาแน่นของของเหลว(จำนวนอนุภาคต่อลูกบาศก์เมตร) กับความเร็วที่ของเหลวนั้นไหลผ่าน (เมตรต่อวินาที) ดังนั้น $\vec{A}$ จึงเป็นปริมาณทางเวคเตอร์ ที่มีทิศทางไปทางเดียวกับการไหลของของเหลวซึ่งมีหน่วยเป็น “จำนวนอนุภาคต่อตารางเมตร วินาที ” ดังนั้นจากประเด็นที่เราต้องการหาคือ อัตราการไหลของของเหลวที่มีหน่วย “จำนวนอนุภาคต่อลูกบาศก์เมตร” เราจะต้องนำ $\vec{A}$ นี้ไปคูณกับ พื้นที่ของพื้นผิว (ตารางเมตร) ที่ของเหลวนี้ไหลผ่านนั่นเอง

ย้อนกลับไปดูรูปที่ ๑.๗(a) อีกครั้งจะพบว่า ลูกศรมีความยาวไม่เท่ากัน นั่นหมายถึงความเร็วในการไหลของของเหลวนี้ไม่สมมูลกันทั่วทั้งพื้นผิว บางส่วนของพื้นผิวจึงมีปริมาณของเหลวที่ไหลมากกว่าส่วนอื่น และมุมของการไหลผ่านพื้นผิวก็เป็นสิ่งที่ต้องนำมาพิจารณาด้วยเช่นกัน เพราะถ้าพื้นผิวช่วงใดที่ขนานไปกับการไหลของของเหลว ก็จะมีปริมาณของอนุภาคของเหลวผ่านพื้นผิวช่วงนั้นเป็นศูนย์ด้วย เราได้ทราบการหาส่วนประกอบของสนามเวคเตอร์ที่ไหลผ่านตั้งฉากกับพื้นผิวจากหัวข้อที่ผ่านมา นั่นก็คือ ผลคูณจุดของ $\vec{A}$ และ $\hat{n}$ แต่ในกรณีนี้พื้นผิวมีลักษณะโค้ง ทิศทางของ $\hat{n}$ จึงขึ้นอยู่ว่าเรากำลังสนใจส่วนใดบนพื้นผิวโค้งนั้น ดังนั้นเราจะแบ่งพื้นผิวโค้งออกเป็นพื้นที่หน่วยย่อย ๆ ดังแสดงในรูปที่ ๑.๗(b) และถ้าเราทำให้พื้นที่ย่อยนี้เล็กเพียงพอ ทั้ง $\vec{A}$ และ $\hat{n}$ ก็จะคงที่ตลอดทั้งพื้นผิวย่อย

กำหนดให้ $\hat{n}_i$ เป็นเวคเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย ของพื้นที่ส่วนย่อยที่ i (มีพื้นที่ da_i) และอัตรา

การไหลของของเหลวผ่านส่วนย่อย i ก็คือ $\left(\overrightarrow{A_i} \circ \hat{n}_i\right) da_i$ ดังนั้นผลรวมของอัตราการไหลทั้งพื้นผิวจึงเท่ากับ $\sum_i \overrightarrow{A_i} \circ \hat{n}_i da_i$

เริ่มจะมองเห็นหรือยังว่าเราจะลงเอยอย่างไร ถ้าเรากำหนดให้ พื้นที่ย่อยนี้หดลงจนมีขนาดเล็กมากจนมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ เครื่องหมาย $\sum$ ก็จะกลายเป็นเครื่องหมาย $\int$ ดังนั้น

$$\text{อัตราการไหลทั้งพื้นผิว} = \int_S \vec{A} \circ \hat{n} da \qquad (๑.๗)$$

สำหรับพื้นผิวปิดแล้วเครื่องหมาย $\int$ ก็จะมีวงกลมล้อมรอบด้วย

$$\text{อัตราการไหลทั้งพื้นผิวปิด} = \oint_S \vec{A} \circ \hat{n} da \qquad (๑.๘)$$

อัตราการไหลของของเหลวนี้ก็คือ ฟลักซ์ของอนุภาคที่ไหลผ่านพื้นผิวปิด S ที่คล้ายกับด้านซ้ายของกฎของเกาส์ เพียงแค่เราแทนที่ $\vec{A}$ ด้วยสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ ก็จะทำให้สมการเหมือนกัน

$\boxed{\oint_S \vec{E} \circ \hat{n} da}$ ฟลักส์ไฟฟ้าที่ไหลผ่านพื้นผิวปิด

จากผลของสมการในหัวข้อที่แล้ว เราควรจะเข้าใจได้ในระดับหนึ่งแล้วว่า ฟลักซ์ Φ_E ของสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ ที่ไหลผ่านพื้นผิว S สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของสมการ

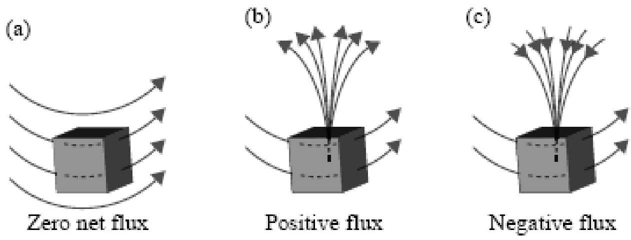
$\Phi_E = \left\|\vec{E}\right\| \times$ พื้นที่ผิว	$\vec{E}$ สมมูลและตั้งฉากกับพื้นผิว S	(๑.๙)
$\Phi_E = \vec{E} \circ \hat{n} \times$ พื้นที่ผิว	$\vec{E}$ สมมูลและทำมุมกับพื้นผิว S	(๑.๑๐)
$\Phi_E = \int_S \vec{E} \circ \hat{n} da$	$\vec{E}$ ไม่สมมูลและทำมุมต่าง ๆ กับพื้นผิว S	(๑.๑๑)

จากสมการแสดงความสัมพันธ์ข้างต้น แสดงให้เห็นว่าฟลักซ์ไฟฟ้านั้นเป็นปริมาณสเกลาร์ และมีหน่วยเป็นสนามไฟฟ้าคูณกับพื้นที่ หรือ Vm แต่จากการเปรียบเทียบของหัวข้อที่แล้วกับสมการข้างต้น ทำให้เกิดคำถามตามมาว่า เราควรคิดว่าฟลักซ์ไฟฟ้าก็คือการไหลของอนุภาค และสนามไฟฟ้าก็คือผลคูณของความหนาแน่นกับความเร็วใช่หรือไม่? คำตอบก็คือ “ไม่ใช่เสียทีเดียว” จำไว้ว่า เมื่อเราเปรียบเทียบกับตัวอย่างในเชิงกายภาพนั้น เราเพียงแค่ต้องการศึกษาเกี่ยวกับ “ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณ” แต่ไม่ใช่เพียงแค่ปริมาณของมันเองเท่านั้น ดังนั้นเราสามารถหาค่าฟลักซ์ไฟฟ้าได้จากการอินทิเกรตส่วนของสนามไฟฟ้าที่ตั้งฉากกับพื้นผิว แต่เราไม่ควรคิดว่าฟลักซ์ไฟฟ้าเป็นการเคลื่อนที่ของอนุภาคในทางกายภาพเด็ดขาด ถ้าอย่างนั้นแล้วเราจะคิดว่าฟลักซ์ไฟฟ้าเป็นอะไรได้บ้าง? วิธีการที่ดีอันหนึ่งก็คือ การใช้เส้นของสนามไฟฟ้าเพื่อแทนสนามไฟฟ้า นั่นคือความเข้มของสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่งใดก็ตาม แทนด้วยช่องว่างระหว่างเส้นสนามไฟฟ้าในตำแหน่งนั้น หรืออีกนัยหนึ่งก็คือ ความเข้มของสนามไฟฟ้านั้นแปรตามความหนาแน่นของเส้นสนามไฟฟ้า (จำนวนเส้นสนามไฟฟ้าต่อตารางเมตร) ในระนาบตั้งฉากกับสนามที่จุดนั้นนั่นเอง เมื่อทำการอินทิเกรตความหนาแน่นเส้นสนามไฟฟ้านั้นต่อพื้นผิวทั้งหมด เราก็จะได้จำนวนเส้นสนามไฟฟ้าทั้งหมดที่ไหลทะลุผ่านพื้นผิว และนี้ก็คือคำนิยามของฟลักซ์ไฟฟ้า

ที่ถูกต้องอย่างไรก็ตามในการใช้คำนิยามของฟลักซ์ไฟฟ้าข้างต้น มีข้อกำหนดที่สำคัญ ๒ ประการ

ประการแรก เส้นสนามไฟฟ้าที่เราใช้แทนสนามไฟฟ้านั้นก็เพื่อความสะดวกในการอธิบาย และจะต้องมีความต่อเนื่องในทุก ๆ ที่ จำนวนของเส้นสนามไฟฟ้าจะเป็นเท่าใดก็ตามไม่สำคัญ แต่จะต้องมีความสอดคล้องกันระหว่างความเข้มสนามไฟฟ้าที่ต่างกัน นั่นคือช่วงที่สนามไฟฟ้าที่มีความแรงเป็นสองเท่าจะต้องแทนที่ด้วยจำนวนเส้นสนามไฟฟ้าเป็นสองเท่าต่อพื้นที่หนึ่งหน่วย ประการที่สองการทะลุผ่านพื้นผิวของสนามไฟฟ้าเหมือนกับถนนสองเลน นั่นคือเมื่อเราได้กำหนดทิศทางของ $\hat{n}$ แล้ว เส้นสนามไฟฟ้าที่มีทิศไปทางเดียวกับ $\hat{n}$ จะมีค่าฟลักซ์เป็นบวก ส่วนเส้นสนามไฟฟ้าที่มีทิศตรงข้ามจะมีค่าฟลักซ์เป็นลบ เช่น เส้นสนามไฟฟ้าห้าเส้นทะลุผ่านพื้นผิวในทิศทางเดียวกัน เมื่อรวมกับเส้นสนามไฟฟ้าอีกห้าเส้นทิศตรงกันข้าม จะให้ค่าฟลักซ์ไฟฟ้าสุทธิเท่ากับศูนย์ ดังนั้นเราควรจะคิดว่า **ฟลักซ์ไฟฟ้าก็คือจำนวนเส้นสนามไฟฟ้าสุทธิที่ไหลผ่านพื้นผิว โดยคำนึงถึงทิศทางการไหลเป็นหลัก**

ตัวอย่างในรูปที่ ๑.๘(a) จำนวนเส้นสนามไฟฟ้าที่ไหลผ่าน “กล่อง”(ไม่ใช่พื้นผิวระนาบ) โดยมีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดภายนอกกล่อง ดังนั้นฟลักซ์สุทธิที่ไหลผ่านกล่องจึงมีค่าเท่ากับศูนย์ ทั้งนี้เพราะเวคเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยสำหรับพื้นผิวปิดจะมีทิศพุ่งออกจากปริมาตรที่พื้นผิวนั้นคลุมอยู่ เราจึงเห็นว่าฟลักซ์ที่ไหลเข้าไปในกล่องมีค่าเป็นลบเนื่องจากผลของ $\vec{E} \circ \hat{n}$ และค่าฟลักซ์ลบนี้ถูกหักล้างด้วยฟลักซ์ที่ ไหลออกจากกล่องที่มีค่าเป็นบวกนั่งเอง



รูปที่ ๑.๘ เส้นฟลักซ์ที่ทะลุผ่านพื้นผิวปิด

ในรูปที่ ๑.๘(b) นอกจากจะมีเส้นสนามไฟฟ้าที่ไหลผ่านเข้าและออกจากกล่องแล้ว ยังมีกลุ่มของเส้นสนามไฟฟ้าที่มีแหล่งกำเนิดจากภายในกล่องพุ่งออกนอกกล่องอีกด้วย ซึ่งในกรณีนี้จำนวนเส้นสนามไฟฟ้าสุทธิไม่เป็นศูนย์แต่มีค่าเป็นบวก ดังนั้นเรากล่าวได้ว่าถ้าฟลักซ์ของสนามไฟฟ้าที่ไหลผ่านพื้นผิว ปิดใด ๆ มีค่าเป็นบวก พื้นผิวนั้นบรรจุแหล่งกำเนิดเส้นสนามไฟฟ้าเอาไว้ และในทางตรงกันข้ามในรูปที่ ๑.๘(c) คงมีแค่ฟลักซ์ไหลผ่านเข้าไปในกล่อง เรากล่าวได้ว่าถ้าฟลักซ์ของสนามไฟฟ้าที่ไหลผ่านพื้นผิวปิดใด ๆ มีค่าเป็นลบ พื้นผิวนั้นดูดเส้นสนามไฟฟ้าเอาไว้

ครั้งนี้ขอย้อนไปที่กฎทองที่กล่าวไว้แล้วเกี่ยวกับ การวาดภาพของเส้นสนามไฟฟ้า ซึ่งเส้นสนามไฟฟ้าเริ่มต้นจากประจุบวก และมีจุดสิ้นสุดที่ประจุลบ ดังนั้นในรูปที่ ๑.๘(b) แสดงให้เห็นว่ามีกลุ่มของประจุบวกอยู่ภายในกล่องที่เป็นแหล่งกำเนิดของเส้นสนามไฟฟ้า และในขณะเดียวกันในรูปที่ ๑.๘(c) ก็แสดงให้เห็นว่ามีกลุ่มของประจุลบที่อยู่ภายในกล่องเช่นกัน ดังนั้นถ้าจำนวนของประจุที่อยู่ในตำแหน่งเหล่านี้มีค่ามากขึ้น จำนวนของเส้นสนามไฟฟ้าและฟลักซ์ก็จะมีมากขึ้นเช่นกัน และถ้าจำนวนของประจุบวกและลบมีค่าเท่ากันภายในกล่องนี้ ฟลักซ์บวกที่เกิดจากประจุบวกก็จะหักล้างกับฟลักซ์ลบที่เกิดจากประจุลบ ดังนั้นฟลักซ์สุทธิมีค่าเป็นศูนย์ เช่นเดียวกันกับประจุสุทธิภายในกล่องก็มีค่าเป็นศูนย์

มาถึงตรงนี้เราพอจะเริ่มเห็นแล้วว่า ความหมายทางกายภาพที่ซ่อนอยู่ใน กฎของเกาส์ (ฟลักซ์ไฟฟ้าที่ไหลผ่านพื้นผิวปิด) ที่ว่าจำนวนของเส้นสนามไฟฟ้าจะแปรผันตามจำนวนประจุทั้งหมดที่อยู่ภายในพื้นผิวนั้น ก่อนที่จะนำข้อสรุปนี้ไปใช้ เรามาดูด้านขวาของกฎของเกาส์กันก่อน

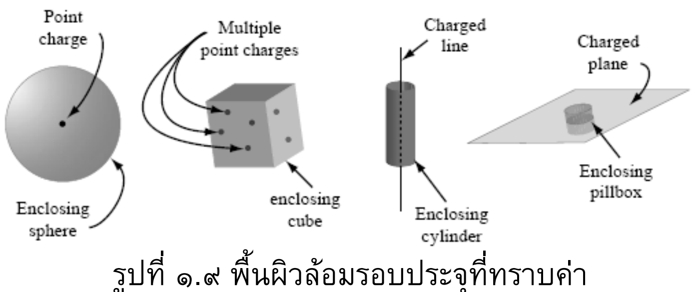
$\boxed{q_{enc}}$ ประจุที่บรรจุภายใน

ถ้าเราเข้าใจความหมายของฟลักซ์ที่ได้อธิบายมาแล้วจากหัวข้อที่ผ่านมา เราก็จะเข้าใจอย่างชัดเจนเลยว่า ทำไมทางด้านขวาของกฎของเกาส์ จึงเกี่ยวข้องกับประจุที่บรรจุภายใน (Enclosed Charge : ประจุที่อยู่ภายในพื้นผิวปิดที่เรากำลังศึกษาเกี่ยวกับฟลักซ์นั้นอยู่) ทั้งนี้เพราะว่า ไม่ว่าประจุใด ๆ ก็ตามที่อยู่ภายนอกพื้นผิว จะผลิตฟลักซ์ลบและฟลักซ์บวก ทำให้ฟลักซ์สุทธิที่ไหลผ่านพื้นผิวมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นเราจะมีวิธีการกำหนด ประจุที่บรรจุภายในพื้นผิวปิดได้อย่างไร?

ในบางปัญหาเราสามารถเลือกพื้นผิวที่บรรจุจำนวนประจุที่แน่นอนได้ ดังเช่นในรูปที่ ๑.๙ เราสามารถกำหนดจำนวนประจุที่บรรจุภายในพื้นผิวปิดที่มีทรงเรขาคณิตชัดเจนได้ แต่ในความเป็นจริงนั้น ประจุที่ถูกล้อมรอบด้วยพื้นผิวใด ๆ จะอยู่กันเป็นกระจุก ภายใต้พื้นผิวปิดที่มีรูปแบบต่างกันไป ซึ่งเราสามารถหาจำนวนประจุได้จากการรวมกลุ่มประจุเหล่านั้นเข้าด้วยกัน

$$\text{จำนวนประจุบรรจุภายในทั้งหมด} = \sum_i q_i$$

ซึ่งกลุ่มประจุเหล่านี้อาจกระจายกันอยู่ ตลอดทั้งสาย หรือระนาบเป็นชั้น ๆ ภายในปริมาตรหนึ่ง การนับประจุรวมเหล่านั้นคงเป็นไปไม่ได้ในทางปฏิบัติ แต่ถ้าเรารู้ความหนาแน่นของประจุเราก็สามารถหาประจุรวมทั้งหมดได้ ความหนาแน่นของประจุนี้อาจอยู่ในลักษณะ ๑, ๒ หรือ ๓ มิติก็ได้



รูปที่ ๑.๙ พื้นผิวล้อมรอบประจุที่ทราบค่า

มิติ	ความหมาย	สัญลักษณ์	หน่วย
๑	ความหนาแน่นเชิงเส้น	λ	C/m
๒	ความหนาแน่นเชิงพื้นที่	σ	C/m^2
๓	ความหนาแน่นเชิงปริมาตร	ρ	C/m^3

ถ้าปริมาณดังแสดงตารางเหล่านี้คงที่ตลอดทั้งเส้น พื้นที่ และปริมาตรแล้ว การหาประจุรวมที่บรรจุภายในทำได้โดยการเอาตัวแปรที่เกี่ยวข้องมาคูณ เช่น

๑ มิติ : $q_{enc} = \lambda L$ (L = ความยาวของเส้นที่ประจุอยู่) (๑.๑๒)

๒ มิติ : $q_{enc} = \sigma A$ (A = พื้นที่ของพื้นผิวที่มีประจุอยู่) (๑.๑๓)

๓ มิติ : $q_{enc} = \rho V$ (V = ปริมาตรที่ครอบคลุมประจุ) (๑.๑๔)

ในกรณีที่ความหนาแน่นของประจุไม่คงที่ตลอดทั้ง เส้น พื้นที่ และปริมาตร เราจะต้องทำการอินทิเกรตที่ได้อธิบายในหัวข้อ อินทิกรัลพื้นผิว มาแล้วในการหาประจุ คือ

๑ มิติ : $q_{enc} = \int_L \lambda dl$ (λ ไม่คงที่ตลอดทั้งเส้น) (๑.๑๕)

๒ มิติ : $q_{enc} = \int_S \sigma da$ (σ ไม่คงที่ตลอดทั้งพื้นที่) (๑.๑๖)

๓ มิติ : $q_{enc} = \int_V \rho dV$ (ρ ไม่คงที่ตลอดทั้งปริมาตร) (๑.๑๗)

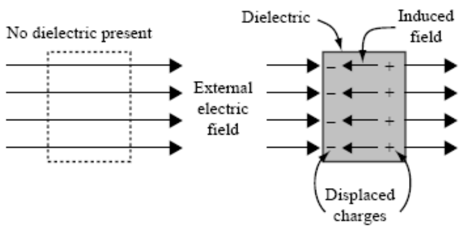
เมื่อเราทราบจำนวนประจุที่บรรจุอยู่ภายในพื้นผิวปิดแล้ว เราสามารถคำนวณหาฟลักซ์ที่ไหลผ่านพื้นผิวนั้นโดยการหารจำนวนประจุด้วยค่า ε_o (permittivity of free space) ซึ่งความหมายของค่าคงที่นี้จะอธิบายในหัวข้อต่อไป

$\boxed{\varepsilon_o}$ Permittivity of Free Space

ค่า permittivity หรือสภาพความยอมทางไฟฟ้าของวัตถุใด ๆ เป็นค่าที่แสดงให้เห็นถึงการตอบสนองต่อสนามไฟฟ้าที่ทำกับวัตถุโดยเฉพาะในวัตถุที่ไม่ใช่ตัวนำที่เรียกว่า ฉนวน หรือ ไดอิเล็กตริก ประจุไม่สามารถเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระ แต่อาจจะเคลื่อนที่จากจุดสมดุลเดิมได้เพียงเล็กน้อย ซึ่งในกฎของเกาส์นั้นเรากำลังพูดถึง ค่า Permittivity ของสูญญากาศ (Free Space) ที่มีค่าประมาณ $\varepsilon_o = 8.854 \times 10^{-12}\, C/Vm$

จากค่าคงที่นี้แสดงให้เห็นว่า กฎของเกาส์ใช้ได้กับสนามไฟฟ้าในสูญญากาศเท่านั้นหรือ? คำตอบคือ "ไม่ใช่" กฎของเกาส์นั้นใช้ได้ทั้งในไดอิเล็กตริกและสูญญากาศ โดยมีข้อแม้ว่าเราจะต้องพิจารณาประจุที่บรรจุภายในพื้นผิวปิดทั้งหมดของวัตถุไดอิเล็กตริก รวมถึงประจุที่เกาะอยู่กับอะตอมของวัตถุไดอิเล็กตริกนั้น หากเรานำวัตถุไดอิเล็กตริกไปวางไว้ในสนามไฟฟ้า ขนาดของสนามไฟฟ้าทั้งหมดภายในวัตถุไดอิเล็กตริก โดยทั่วไปจะน้อยกว่าสนามไฟฟ้าภายนอกอยู่เล็กน้อย ทั้งนี้เกิดจากการที่วัตถุ

ไดอิเล็กตริกจะเกิดขั้วไฟฟ้าขึ้นเมื่อนำไปวางในสนามไฟฟ้า ประจุบวกและประจุลบภายในอะตอมจะเคลื่อนที่จากตำแหน่งเดิมและแยกออกจากกัน จึงทำให้เกิดสนามไฟฟ้าภายในอะตอม และมีทิศตรงข้ามกับสนามไฟฟ้าภายนอก ดังแสดงในรูปที่ ๑.๑๐ ทำให้สนามสุทธิภายในอะตอมน้อยกว่าภายนอก



รูปที่ ๑.๑๐ สนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำในวัตถุไดอิเล็กตริก

จากความสามารถในการลดขนาดสนามไฟฟ้าของวัตถุไดอิเล็กตริกนี้เองจึงนำไปสู่การใช้งานสำหรับอุปกรณ์พื้นฐานนั่นคือ การเพิ่มขึ้นของค่าการเก็บประจุ (capacitance) และการเพิ่มขึ้นของ operating voltage ของตัวเก็บประจุ ถ้าเรายังจำได้ว่าค่า capacitance ของตัวประจุแบบแผ่นเพลตขนาน คือ

$$C = \frac{\varepsilon A}{d}$$

โดยที่ A คือพื้นที่หน้าตัดของเพลต d คือระยะห่างระหว่างเพลต และ ε คือค่า permittivity ของวัตถุระหว่างเพลต ยิ่งวัตถุที่มีค่า ε สูงเท่าใด ก็จะมีความสามารถในการเก็บประจุมากขึ้นโดยไม่ต้องทำให้หน้าตัดเพิ่มขึ้น หรือระยะระหว่างเพลตลดลง ค่า permittivity ของวัตถุไดอิเล็กตริก นั้นมักแสดงอยู่ในรูปของ ค่า relative permittivity(ค่าสัมพัทธ์) นั่นคือค่า permittivity ของวัตถุที่มากกว่าค่า permittivity ของสูญญากาศ $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_o$

สำหรับตัวอย่างของการคำนวณกฎของเกาส์สำหรับสนามไฟฟ้า สามารถหาอ่านได้เพิ่มเติมจากเอกสารอ้างอิง

เอกสารอ้างอิง

Fleisch, D. **A Student's Guide to Maxwell's Equations.** New York : Cambridge University Press, 2008.

Hayt, W.H., JR., Buck, J.A. **Engineering Electromagnetics**. 7th Ed., Singapore : McGraw-Hill, 2006.

Kraus, J.D. **Electromagnetics.** 4th Ed., New York : McGraw Hill, 1992.

"Physics for Dent". [Online]. Available : http://physics.science.cmu.ac.th/courses/207145/content.html

Schey, H.M. **Div grad curl and all that :an informal text on vector calculus.** 2nd Ed., New York : W.W. Norton, 1992.

ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล [Online] เข้าถึงได้จาก http://www.rmutphysics.com/charud/PDF-learning/